

Math. A.

23

Bevtrag

Math. A.

23

Greysburg

Math. A.

23

Math. Geometr. applic. 449.

Math. A. 23

(von F. ...)

[Franz von Fraun]

Practischer Beytrag

zu

topographischen Vermessungen.

Mit Bemerkungen

über die Methoden und Formeln

des

Herrn Delambre

und anderer französischer Geometer.

R

Handwritten signature

Nürnberg 113

bey J. A. Stein. 1810.

Practischer Beytrag

22

topographischen Vermessungen.

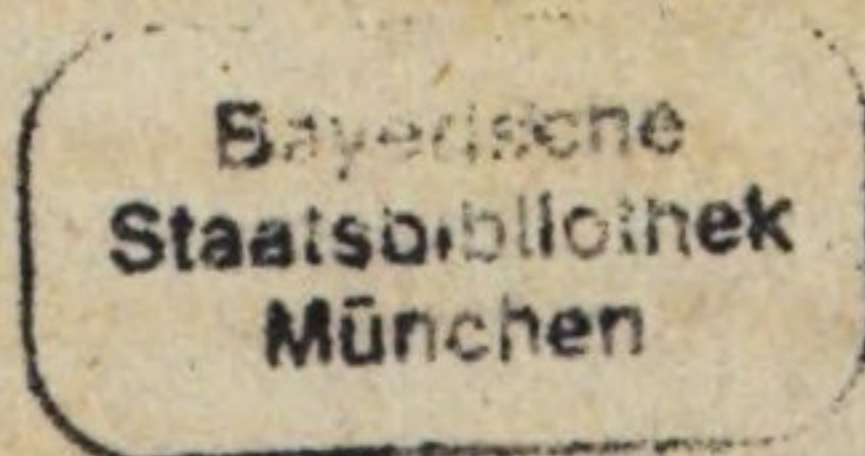
Mit Bemerkungen

über die Methoden und Formeln



Heinrich

und anderer französischer Geometer.



Nürnberg

bei J. A. Stein 1810.

Bemerkungen

ü b e r

die topographischen Messungs-Methoden und
Formeln der französischen Geometer.

V o r b e r i c h t.

Es ist bekannt, daß Bayern und ein grosser Theil des fränkischen Kreises von deutschen und französischen Geometern aufgenommen, und trianguliert wurden. Diese Operationen sind seit bereits einem Jahre beendigt, und man arbeitet nunmehr an dem Entwurfe der Charte, die mit vielem Fleisse und grosser Genauigkeit entworfen werden wird. Wir dürfen um so gewisser darauf rechnen, daß das angehoffte Werk alles was bis anhero in Deutschland in diesem Fache erschien, übertreffen werde, als die Instrumente, und Messungs-Methoden ungemein vervollkommnet worden sind, und man nunmehr ein Zusammentreffen von Sekunden fordert, wo man vormals einen hohen Grad der Genauigkeit erreicht zu haben glaubte, wenn die Rechnungen bis auf einige Minuten zusammentrafen.

Es ist zu bedauern, daß nicht immer eine ungetrübte Harmonie zwischen den Geometern beider Nationen herrschte. Die Umstände des Zwistes wurden auf gar verschiedene Weisen erzählt. Die wahren sind dem Verfasser vollkommen bekannt, und er kann nicht umhin seine werthen Landes-Leute zu beschuldigen, daß sie gegen das Verdienst ihrer Mitarbeiter ungerecht waren. Die französischen Methoden sind nicht die bestmöglichen, aber nur ein Unwissender kann sie schlecht nennen. Da sie seit beinah 200 Jahren das grosse Vermessungs-Werk praktisch betrieben, so haben sie dieser Arbeit eine zwekmässige praktisch bequeme Organisation zu geben gewußt, von der unsere Theoretiker nichts wußten. Ihre Protokolle und Tabellen sind zwekmässig eingerichtet, erleichtern ungemein die Uebersicht, und liefern Nebenberechnungen, die zu Controlirung der Hauptrechnungen dienen. Solche durch vieljährige Erfahrung bewährte Einrichtungen muß man nicht um einiger theoretischer Grilen willen verwerfen. Die Regierung, welche in dergleichen Fällen den Schiedsrichter machen soll, geräth bey solchen Zwisten in eine peinliche Verlegenheit. Von einem Minister ist nicht zu erwarten, daß er die erforderliche Sachkenntniß habe, um den Streit zu entscheiden. Fordert er das Parere eines dritten, so ereignet sich sehr oft, daß dieser dritte beiden Theilen Unrecht gibt, und ganz andere Methoden vorschlägt. So wurde den französischen Geometern zum Fehler gerechnet, daß ihre Dreyecke zu klein seyen: Allein es stehet in Praxi dem Geometer nicht frey nach Belieben seine Standpunkte zu wählen. Die Schwierigkeiten, auf die der Geometer stößt, kennt nur der,

welcher es einmal versucht hat, ein grosses Land zu trianguliren.

So ungegründet auch die meisten Vorwürfe sind, die man den französischen Geometern machte, so weiss doch das Publikum eigentlich nicht, woran es ist, und diese Ungewissheit könnte Misstrauen gegen die Güte und Brauchbarkeit der zu erwartenden Charte erwecken. Ich beschloß also *Delambres* Werk. *Methodes analytiques pour la determination d'un Arc du Meridien* zu übersetzen, und mit Noten zu begleiten, damit jeder der Augen hat, und somit sehen kann und will, sich überzeugen könne, daß der Tadel, der diese Methoden traf, ungerecht sey. Allein ich fand bald, daß ich durch eine Uebersetzung meinen Zweck nicht erreichen würde. *Delambres* Werk strotzt von neumodischer Prunkgeometrie, von Reihen und differential Formeln. Also wäre die Uebersetzung nur denen verständlich, die in diesem Machwerke bewandert sind. Deren sind nun sehr wenige, und unter diesen wenigen sind einige, die an der Zuverlässigkeit dieser Transzendental-Geometrie mit Recht zweifeln. Für Geometer, die ihr Studium auf die strenge Elementar-Geometrie beschränkt haben, und dazu gehören beinah alle, die man bey einer solchen Vermessung anstellen kann, wäre die Uebersetzung gar nicht brauchbar, und sie müßten sich begnügen, sich der gegebenen Formeln mechanisch zu bedienen. Ich beschloß demnach bloß die Ordnung des Delambrischen Werkes bezubehalten, den Gang der Ideen des Verfassers, und seine Methoden summarisch anzuführen, und die zweckmässigsten Formeln nebst den Beweisen jedoch mit Weglassung al-

ler aus dem *Differential* Calkul abgeleiteter Halbbeweise aufzuführen, so daß dieses Werk selbst für die verständlich und brauchbar seyn wird, die keinen *Differential* Calkul verstehen.

Der Leser wird also hier einen neuen Beweifs finden, daß die sogenannte höhere Analysis in der Geometrie ganz entbehrlich sey, und daß man mittels der Elemente alle wahren Verhältnisse leichter und bequemer finden könne. Liessen sich unsere Archimede aus dem Nebel ihres Unendlichen bis zu uns herab, würdigten sie die ächte Geometrie des Endlichen einiger Aufmerksamkeit, so würde diese sehr bald ein anderes Ansehen gewinnen, und wieder werden, was sie zu den Zeiten des ächten Archimedes war, die fruchtbare Mutter nützlicher Erfindungen.

Von den Vermessungs-Instrumenten.

Die französischen Geometer bedienen sich zu Winkelmessungen, des Bordaischen Kreises. Die Brauchbarkeit und Zweckmässigkeit dieser Instrumente ist bekannt. Sie werden in Paris mit grosser Genauigkeit verfertigt. Herr Reichenbach hat ihnen durch die Genauigkeit seiner Theilung einen neuen Grad von Vollkommenheit gegeben. Dieses Instrument ist so eingerichtet, daß man denselben Winkel bequem so oft auf einer anderen Skala messen kann, als man will. Ist also bey einzelnen Messungen ein kleiner Fehler begangen worden, oder ist die Eintheilung der Skala auch nicht äusserst genau, so vertheilen sich die Unrichtigkeiten unter die grosse Zahl der Beobachtungen, heben sich zum Theile auf, und geben ein Mittel, das der Wahrheit so nahe kommt als möglich.

Eine beinah eben so grosse Genauigkeit gewähren die Reichenbachischen Theodoliten; die auch den Vortheil verschaffen, daß die mit diesem Instrumente gemessenen Winkel keiner Redukzion auf dem Horizont bedürfen. Zum zweckmässigen Gebrauche beider Instrumente gehöret einige Uebung.

Die gemessenen Winkel werden in ein Protokoll eingetragen; und zwar wird die ganze Reihe der Beobachtungen aufgezeichnet. Zu gleicher Zeit werden bey jedem Winkel die Abstände der beobachteten Punkte vom Zenith gemessen, damit die Haupt-Winkel auf den Horizont reduzirt werden können.

Ist endlich die Beobachtung nicht im Centrum der Station geschehen; so wird die Lage des Standes des Beobachters gegen den Mittelpunkt durch Zeichnung und Messung auf das genaueste bestimmt.

Jeder gemessene Winkel bekommt ein besonderes Blatt im Protokolle.

Werden diese Vorschriften genau befolgt, so ist ein solches Protokoll eine Sammlung der verlässlichsten Daten, und ein beiläufiger Ueberschlag muß die 3 Winkel des Dreyeckes mit einer Genauigkeit von wenigen Minuten geben. Allein es könnte der Verdacht entstehen, daß diese Vorschriften nicht immer genau befolgt werden. Dann muß der saumselige Beobachter, um den Revisor zu täuschen mit dem Daumen nachschieben (*donner le coup de pouce*). Indessen ist bey der Vermessung von Bayern die Nachmessung nicht versäumt worden.

Zur Controle der Messungen dienen die Rechnungen. Wenn die gemessenen Winkel eines Dreyecks auf das Centrum der Station und auf den Horizont reduzirt sind, so darf ihre Summe nur höchstens um 6 bis 7 Sekunden grösser als 180 Grade seyn. Hat man auf einer Station den ganzen Horizont durchlaufen, so darf die Summe aller reduzirten Winkel höchstens um einige Sekunden grösser oder kleiner seyn, als 360 Grade. Von Menschen, und Instrumenten, die Menschen gemacht haben, kann keine grössere Genauigkeit gefordert werden.

Von Centesimal und Sexagesimal Graden.

Die Bordaischen Kreise sind in Centesimal-Grade, das ist der Quadrant ist in hundert Grade jeder von hundert Minuten getheilt. Diese Eintheilung erleichtert die Berechnung des Mittels aus einer grossen Menge von Beobachtungen. Allein man hat keine guten Tafeln für diese Kreiseintheilung. Die Delambrischen Tafeln sind voll Fehler, und die Franzosen bedienen sich der sehr genauen Tafeln von Callet, die nach der Sexagesimal Eintheilung berechnet sind. Die Vorzüge der Calletischen Tafeln werden niemanden befremden, der da weiss, welche ungeheure, und mit der grössten Genauigkeit berechneten Tafeln schon seit 200 Jahren bestehen. Diese Tafeln sind nicht nach den durch die Differential-Rechnung gefundenen Formeln, sondern nach streng geometrischen Methoden berechnet worden. Die wenigen Fehler, die sich eingeschlichen haben, sind durch unzählige Revisionen gefunden und verbessert worden, und somit werden die neuen Ta-

feln erst nach vielen Jahren jenen Grad von Vollkommenheit erhalten, den die Calletischen Tafeln haben.

Diesemnach muß die aus mehrern Beobachtungen ausgezogene mittlere Gröſſe des Winkels aus dem Centesimal-Maafse auf das Sexagesimalmaafs reduziert werden.

Für diese Redukzion hat man Hilfs-Tabellen, die aber wenig nützen, und deren Gebrauch verwickelt ist. *Delambre* lehrt folgender massen zu verfahren.

Er bezeichnet durch G die Centesimal Grade. Da nun bey der Sexagesimal Eintheilung der Quadrant in 90 Grade getheilt ist, so sind $10^G = 9^\circ$.

Es werde verlangt $68^G, 57', 49''$ auf Sexagesimal-Grade zu reduzieren.

Man schreibe die gegebene Gröſſe	$68^G, 57, 49^0$
ziehe den roten Theil davon ab	6 85 749
Rest in Sexagesimal Graden und Dezimalen	$61^0, 71\ 741$
Die Dezimalen multipliziert mit	6
Produkt.	$43', 0446$
in Minuten und Dezimal Minuten.	
Diese Dezimalen multipliziert mit	6
Produkt in Sekunden und Dezimal Sekund.	$2'', 676$
also. $68^G, 57, 49 = 61^0, 43' 2'', 676$.	

Da Anfänger wegen Setzung des Comma, das die Dezimalen abschneidet, in Verlegenheit kommen, so dient zur mechanischen Regel, daß wenn nach der ersten Subtrakzion (n) Dezimalen abgeschnitten worden sind, man nach der ersten Multiplikation mit 6, ($n-1$) Dezimalen, und nach der zweyten ($n-2$) Dezimalen durch das Comma abschneiden müsse.

Wird gefordert, daß man Sexagesimal Grade auf Centesimal Grade reduziere, so verfähre man folgender massen:

Zu reduzierende Gröfse $61^{\circ}, 43', 02'', 676$
6

Man dividire die Sekunden und
 ihre Dezimalen durch 6. $61^{\circ}, 43', 0446.$
6

Man dividire die Minuten und
 ihre Dezimalen durch 6 $61^{\circ}, 71741.$
 diese Gröfse mit 10 multipliziert $617, 1741.$
 durch 9 dividirt 9.

thut in Centesimal Graden $68^{\circ}, 57, 49$

Auf diese Art wird diese Reduktion weit leichter verrichtet, als wenn man sich der complizirten Tabellen bedient.

Correkzion der beobachteten Winkel wegen der Excentrizität des einen Fernrohres im Bordaischen Kreise.

Der Bordaische Kreis hat zwey übereinanderliegende Fernröhren, wovon die eine auf einen Gegenstand gerichtet, und in dieser Richtung befestiget wird, während man die zweyte auf den anderen Gegenstand richtet. Dreheten sich nun beide Fernröhren um denselben Mittelpunkt, so wäre der Winkel, den die Fernröhren am Mittelpunkte bilden, genau der Winkel, den man sucht. Allein die obere Fernröhre ist an der Periferie eines kleinen beweglichen Kreises befestiget, durch dessen Mittelpunkt die andere Fernröhre geht, und diese Excentrizität der einen Fernröhre gibt das

Maas bald gröfser und bald kleiner, als es seyn sollte. Die Differenz beträgt bey nahen Gegenständen mehrere Sekunden. Man mufs sie also berechnen, wenn man auf einen hohen Grad von Genauigkeit Ansprüche macht.

Ohne den Verdiensten des Herrn *Delambres* als Geometer zu nahe zu treten, kann man mit Wahrheit behaupten, dafs er nicht die Gabe habe seine Begriffe deutlich mitzutheilen. Ich sehe mich also genöthiget, ihn bey diesem Artikel ganz zu verlassen, und einen eigenen Weg zu wandeln.

Die erste Figur stellt das Instrument vor. Der äussere Kreis ist getheilt. Unter demselben liegt die Fernröhre *TU*, welche auf den Gegenstand *A* gerichtet, und in dieser Lage mit dem graduirten Kreise befestiget ist. Das zweyte Fernrohr *VX* ist als Tangente an dem kleineren inneren um den Mittelpunkt *C* beweglichen Kreise befestiget. Wird sie ebenfalls auf den Punkt *A* gerichtet, so weiset der Zeiger *F* den Punkt der Eintheilung nach, von dem aus man die Grade zählt.

Es sey *B* ein zweyter Gegenstand, so ist *ACB* der Winkel, den ich suche, und den man direct finden würde, wenn die zweyte Fernröhre im Centrum befestiget wäre; Allein da sie excentrisch ist, so wird sie die Lage *HLB* haben, wenn sie auf *B* gerechnet ist, und während der Umdrehung beschreibt der Zeiger den Bogen *FG*, welcher gröfser oder kleiner seyn kann als der wahre Winkel *DCE*, je nachdem der Punkt *B* näher oder weiter entfernt ist, als der Punkt *A*.

Um sich davon zu überzeugen, erwäge man, dafs im Vierecke *RCLK*, das im *R* und *L* rechtwinklicht

ist, der Winkel $RKL = 180 - RCL$, folglich der Winkel $SKB = RCL$ sey.

Nun ist der Winkel ASB ein äusserer Winkel für die dreyecke ACS und BKS . also ist: $ASB = SBK + SKB = SBK + FCG$ und auch $ASB = SAC + SCA = SAC + KCE$; Es ist demnach; wenn $SBK = B$; $SAC = A$ gesetzt wird: $A + DCE = B + FCG$

Es ist demnach der Winkel DCE dem Winkel FCG nur dann gleich, wenn die Winkel A und B gleich, und also die Punkte A und B gleich vom Punkte C entfernt sind. Ist aber der Punkt B weiter entfernt, so ist der Winkel B kleiner als der Winkel A , und somit FCG , der beobachtete Winkel grösser als der wahre DCE ; und umgekehrt. Ist $W = DCE$ der wahre Winkel, $FCG = O$ der beobachtete, so ist demnach: $W = O + B - A$. Es sey $r =$ dem Radius CR , so ist $\sin A = \frac{r}{AC}$; $\sin B = \frac{r}{BC}$; und da A und B sehr klein sind

so kann man annehmen, es sey $\sin A = \text{Arcus } A$. $\sin B = \text{Arcus } B$, also ist: $W = O + \frac{r}{AC} + \frac{r}{BC}$

Diesen Ausdruck der Bogen A und B weiset *Delambre* an in Sekunden dadurch zu verwandeln, dass man sie durch den Sinus einer Sekunde dividirt. An sich hat diese Weisung ihre unbefangene Richtigkeit; allein die Geometer, die keine Astronomie studirt haben, werden schwerlich wissen, was durch diese Verwandlung gemeint sey. In unseren Elementar-Büchern findet man kein Wort von dieser Verwandlung, und die astronomischen setzen sie als bekannt voraus. Es

wird also zweckmässig seyn hier darüber Aufklärung zu geben.

Man kennt das aproximierte Verhältniß des Radius zur Periferie. Man kann demnach den Sinus Bogen einer Secunde berechnen. Man findet in den neueren Logarithmen Tafeln die Gröfse dieses Bogens, wobey der Radius = 10000,000,000 gesetzt wird. Unter dieser Voraussetzung ist $\text{Arc } 1'' = 0,0000048481$. Ist also irgend ein Bogen n mal gröfser, so ist derselbe $= n(0,0000048481)$. Ist nun r ein Bogen, so ist $r = n(0,0000048481)$. und

$$\overline{AC} \quad \overline{AC}$$

somit n , oder die Zahl der Sekunden $= r$
 $\overline{AC. (0,0000048481.)}$

Es ist aber diese Zahl der Sinus einer Sekunde; also ist die Zahl der Sekunden $= r$
 $\overline{AC. \text{Sin } 1''}$

Nun ist man im Stande die Gröfse der Winkel A , B durch die Logarithmen zu berechnen. Bey dieser Berechnung kömmt es wesentlich auf die Gröfse r , den Radius des innern Kreises an, der höchstens einen Zoll hat. Allein da jeder Bordaische Kreis ein anderes r hat, so muß für jedes Instrument eine andere Corrections-Tabelle entworfen werden.

Wenn man mit dem Bordaischen Kreise die drey Winkel A, B, C , eines Dreyeks (*Fig. 2*) mißt, so heben sich die Excentrizitäts-Fehler der drey Beobachtungen auf, denn nach obigen ist, wenn D, E, F die beobachteten Winkel sind.

$$A = D + \frac{r}{AC \text{ Sin } 1''} - \frac{r}{AB \text{ Sin } 1''}; \quad B = E + \frac{r}{AB \text{ Sin } 1''} - \frac{r}{BC \text{ Sin } 1''};$$

$$C = F + \frac{r}{BC \text{ Sin } 1''} - \frac{r}{AC \text{ Sin } 1''}; \quad \text{also } A + B + C = D + E + F.$$

*Von der Reduktion der gemessenen Winkel auf das
Centrum der Station.*

Wenn die gemessenen Winkel, wie die wahren Winkel eines Dreyeckes genau 180 Grade betragen sollen, so muß nicht nur das Instrument äusserst genau getheilt seyn, sondern es muß auch dasselbe genau in die Ebene der drey Standpunkte gestellt werden. Dieses ist geradezu unmöglich, folglich ist es gerade nur die Wirkung einer Compensation von Fehlern, wenn die 3 gemessenen Winkel genau mit den wahren zusammentreffen.

Soll die Messung mit möglichster Genauigkeit verrichtet werden, so muß der Beobachter sich gerade auf den Punkt stellen, auf den er von einem anderen Standpunkte sein Fernrohr gerichtet hat. Da nun dieses nicht seyn kann, so muß er, wo es seyn kann, sich ins Centrum des Thurms oder Signals stellen, auf welches er von einem anderen Punkte visiret hat. Allein die Thürme sind innwendig mit Zimmerwerk verbauet, und man ist genöthigt sein Instrument ausser dem Centrum zu stellen. Da weicht, wie leicht zu erachten, die Messung mehr oder weniger von der Wahrheit ab. Denn es sey (*Fig. 2*) ein Thurm, dessen Mittelpunkt *C* ist. Da ist dann *ACB* der wahre Winkel. Kann ich mich aber nicht in *C* stellen, und stelle mich in *E*, so ist der Winkel *AEB* grösser als *ACB*; stelle ich mich aber in *D*, so ist *ADE* kleiner als *ACB*. Der Unterschied beträgt oft mehrere Minuten.

Man muß demnach durch Rechnung bestimmen, wie groß der gemessene Winkel gefunden worden wäre, wenn man im Centrum der Station beobachtet hätte.

In dieser Absicht entwirft man eine Skizze seiner Beobachtungen nach einem beliebigen Maafsstabe, trägt seine Basis auf; und sobald man durch die Kreuzung der Linien ein Dreyek hat, in dem man zwey Seiten und einen Winkel oder einen Winkel und zwey Seiten kennt, so berechnet man die unbekannten Seiten durch die bekannten trigonometrischen Formeln. Diese Berechnung ist nur eine provisorische Aproximation, die hinreichend genau ist; weil sie nur zur Centrirung der beobachteten Winkel dient.

Will man zu dieser Redukzion schreiten, so muß
 1^o die Lage des Standpunkts gegen das Centrum genau bestimmt werden. Man verfertigt demnach einen Grundriß des Gebälkes und des Bodens, und bezeichnet auf denselben seine Standpunkte, denn oft muß man auf derselben Station seinen Standpunkt ändern.
 2^o Muß man durch Messung den Winkel bestimmen, den der linke Schenkel des gemessenen Winkels mit der Linie macht, die vom Standpunkte nach dem Centrum gezogen wird.

3^o Muß man die aproximierte Distanz der beobachteten Punkte vom Centrum kennen.

Dieses vorausgesetzt, so kennt man in der Figur (3) 1^o den Abstand des Standpunktes O von C . Er sey $= r$. 2^o die Distanz $AC = G$, die Distanz $BC = D$, und den Bogen $EFGH = \gamma$, wonach der Winkel $EOC = 360 - \gamma$; $KOC = 360^\circ - (O + \gamma)$.

Der Winkel ODC ist für die Dreyecke OAD und CBD ein äusserer Winkel, also ist $O + A = C + B$. so mit in dieser Lage: $C = O + A - B$. Wäre hingegen der Standpunkt in O' , das ist auf der rechten Seite des

Centrums, so wäre $\angle AOB$ der observirte Winkel O , und somit $C + A = O' + B$ und $C = O' + B - A$.

Wäre der Standpunkt in O (Fig. 4.) So wäre $C = O + A + B$, wäre er in O' , so wäre $C = O - A - B$.

Um also den Winkel C zu bestimmen, müssen die Winkel A und B aus den gegebenen Gröſſen berechnet werden, und es ist:

$$1^{\circ} OB: OC = \sin KOC: \sin B,$$

$$D: r = \sin O + \gamma: \sin B. \text{ also: } \sin B = \frac{r \sin O + \gamma}{D}.$$

$$2^{\circ} AC: OC = \sin EOC: \sin A. \text{ also: } \sin A = \frac{r \sin \gamma}{G}$$

$$G: r = \sin \gamma: \sin A. \quad G.$$

Da nun auch hier die Winkel A und B sehr klein sind, so kann man ihren Sinus dem Bogen gleich setzen, und dividirt man ihren Werth durch $\sin 1''$, so hat man diesen Werth in Sekunden, den man dann entweder addirt, oder subtrahirt.

Die verschiedenen Lagen der Punkte C und O gegen einander veranlassen oft Mißgriffe, und Irrungen, weil diese Lage bestimmt, ob die Winkel A und B addirt oder subtrahirt werden müssen. Ein geübter Geometer findet sich leicht zurecht, aber nicht alle die, welche man zu Vermessungen gebraucht, sind geübte Geometer. Man thut also in jedem Falle besser, wenn man die Rechnung an mechanische Methoden bindet, die Irrungen so viel nur immer thunlich ist, unmöglich machen. Um dieses zu bewirken, nimmt Herr *Delambre* den 2ten Fall (Fig. 3.) wo nemlich der Beobachter in O' , vom Centrum rechts stehet, als Regel an, da ist also: $C = O + B - A$.

$$\begin{array}{rcl}
 \text{also ist } B & = & + 32'',98 \\
 A & = & - 43'',73 \\
 B - A & = & - 10'',75 \\
 \text{und } O & = & 58^\circ, 32', 27'',90 \\
 & & - 10,75 \\
 \text{also } C & = & 58^\circ, 32', 17'',15
 \end{array}$$

Gesetzt es wäre $y = 200^\circ$, so wäre $O + y = 258^\circ, 32', 27'',9$. Dann wäre $\sin O + y = -\sin 78^\circ, 23', 27'',9$. $\sin y = -\sin 20^\circ$, diesem nach wäre B negativ, und A würde positiv, das ist, man müßte B von O abziehen und A dazu addiren; Man hätte also:

$$\begin{array}{rcl}
 \log r + \text{Compl: } \log \sin 1'' & . & . & 5,79155. \\
 \text{Compl: } \log D & . & . & 5,92082. \\
 \log \sin 78^\circ, 32', 27'',9 & . & . & 9,99126 \\
 \log B \text{ in Secunden} - & . & . & 1,70363 \\
 \log r + \text{Compl: } \log \sin 1'' & . & . & 5,79155. \\
 \text{Compl: } \log: G & . & . & 5,85387. \\
 \log: \sin 20^\circ & . & . & 9,53406 \\
 \log: A \text{ in Secunden} + & . & . & 1,17948
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 \text{also } O & = & 58^\circ, 32', 27'',90 \\
 + A & = & 0^\circ, 0', 15'',11 \\
 O + A & = & 58^\circ, 32', 43'',01. \\
 - B & = & 0^\circ, 0', 50'',54 \\
 O + A - B & = & 58^\circ, 31', 52'',47
 \end{array}$$

Diese Einrichtung ist zweckmässig, und verhütet viele Irrungen. Um y zu messen, stellt der Beobachter die eine Fernröhre in die Richtung des linken Schenkels, und drehet die andere von der rechten zur linken Hand, bis sie in der Richtung des Centrums ist;

der Bogen, den sie durchläuft, ist der Bogen y . In (Fig. 4) ist $DEFG$ der Bogen y , DOK der Bogen O , also $O+y$ grösser als 360° , folglich $\sin (O+y)$ positiv; und da $\sin y$ negativ ist, so ist: $C = O + B + A$.

Kann das Centrum nicht gesehen werden, so entwirft der Geometer einen Grundriß des Standortes, und bestimmt auf dem Boden durch trigonometrische Rechnungen die Richtung des Centrums. In dieser Richtung hängt er einen Senkel auf, auf den er sein Fernrohr richtet.

Die französischen Geometer verfahren etwas anders, allein ihre Methode erschweret die Rechnung ohne Noth. Mir scheint diese bequemer in der Voraussetzung, daß der Beobachter in der Trigonometrie bewandert sey.

Dieser deutlichen und bequemen Weisungen ungeachtet, ereignen sich dennoch öfters Irrungen, die sich erst dann offenbaren, wenn man mehrere reduzirte Winkel zu einer Horizontal Kreisfläche zusammenstellt. Bey der Vermessung von Bayern war dieses nur einmahl der Fall. Immer zeigte sich nur ein Unterschied von sehr wenigen Sekunden; allein da diese Reduktionen Mühe machen, so sucht man sich dieselbe zu ersparen, und stellt sich ins Centrum, so oft nur immer möglich ist.

Stellt man sich in die Periferie des Kreises, der durch die Spizen des Dreyeckes gehet, so ist es eben so gut, als wenn man im Centrum stünde. Allein, da die Punkte dieses Kreises nur äusserst selten bestimmt werden können, so rath *Delambre* sich auf die Tangente zum Punkte C , und zwar so nahe als möglich zu stellen. Allein diese Weisung taugt nicht. Bequeme Geometer helfen gar zu gerne der Tangente mit dem Daumen nach. Wer

genaue Resultate haben will, muß sich die Mühe seine Unbekannten durch strenge Rechnung zu suchen nicht gereuen lassen.

Wenn von demselben Standpunkte aus mehrere Winkel gemessen werden, so soll bey jeder Messung der Bogen γ , welcher diesem Winkel coordinirt ist, gemessen, und nicht durch Rechnung bestimmt werden. Nachlässige Beobachter vernachlässigen diese bestimmte, und zweckmässige Weisung des Herrn *Delambre*, besonders dann, wenn sie wissen, daß die Berechnung der Tabellen einem anderen Geometer aufgetragen wird. Durch diese Nachlässigkeit entstehen viele Irrungen, und das Mindeste, das daraus erfolgt, ist die Nothwendigkeit alle Tabellen einer Station neu zu berechnen. Ein *Director* sollte solche Sudeleyen streng bestrafen.

Die auf das Centrum reduzirten Winkel müssen nun auch auf den Horizont reduziret werden; und bey dieser Gelegenheit kann ich nicht umhin den Herrn *Delambre* zu beschuldigen, daß er den Karren vor die Pferde spanne. Es ist einleuchtend, daß der Vernunft und allen deutlichen Vorstellungen des Gegenstandes gemäß die beobachteten Winkel zuerst auf die Ebene des Horizontes, und dann auf das Centrum reduzirt werden sollten. Hier ist nicht der Fall, wo es gleichgültig ist, welche von diesen beeden Operationen zuerst vorgenommen wird. Die Abweichung kann in Bergorten Minuten betragen; und eben darum ist schwer zu glauben, daß die Rechnungen bey Messung des Meridians bis auf Zolle zugetroffen haben.

Von der Reduktion eines beobachteten Winkels auf das Centrum des beobachteten Gegenstandes.

Wenn O , (Fig. 5.) der Standpunkt, F der eine, der 4eckige Thurm $abcd$ der andere Gegenstand ist, wenn ferner von dem Thurme nur die Seite bc beleuchtet ist, und man auf A den Mittelpunkt der Seite bc das Fernrohr richtet, so gehet die Gesichtslinie nicht durch den Mittelpunkt M , und somit ist der gemessene Winkel AOF um den Winkel AOM zu groß. Der Winkel AOM wird gefunden, wenn man MO und den Winkel AMO misst. Ist Fig. (6) ein runder von der Sonne schief beleuchteter Thurm, so ist nur der Theil AB sichtbar, und somit gehen die Gesichtslinien nicht durch das Centrum C . Es ist also der beobachtete Winkel AOF um AOC zu klein. Ist hingegen nur der Theil MN beleuchtet, so ist MOA um MOC zu klein. Wie die Winkel AOC , und MOC zu berechnen seyen, dazu bedarf kein Geometer Anleitung. Es ist also hinreichend die Aufmerksamkeit der Beobachter auf diesen Gegenstand gerichtet zu haben.

Von der Reduktion auf den Horizont.

Pag 26
Delambre

Die auf das Centrum reduzierten Winkel liegen alle in verschiedenen schiefen Ebenen, und müssen auf die Ebene horizontal projiziert werden. Die Vernunft und natürliche Ordnung foderte, daß man umgekehrt verführe, zuerst den observirten Winkel auf die Horizontal Ebene, und diesen reduzierten Winkel auf das Centrum reduzierte. Wer in Deutschland eine Mappirung zu dirigiren hat, dürfte wahrscheinlicher Weise auf diese Erinnerung Rücksicht nehmen.

Der Horizont ist eine Ebene, auf der der Radius der Erde, welcher durch den Standpunkt gehet, senkrecht ist. Wenn von jedem Punkte der Schenkel des gemessenen Winkels eine senkrechte Linie auf diese Ebene gefällt wird, so bilden die durch diese orthogonische Projektion bestimmten Schenkel den Winkel, den wir durch unsere Reduktion suchen.

Die beobachteten Punkte liegen in Vertikal-Ebenen, die durch den Mittelpunkt des beobachteten Gegenstands gehen. Die Neigung dieser zwey Flächen gegen einander wird durch eine Ebene bestimmt, die auf beiden im Standpunkte senkrecht, und somit das gesuchte Stück der Horizontal-Ebene ist.

Die beobachteten Gegenstände können über oder unter dieser Horizontal-Ebene liegen. Eine Ebene, in der der Standpunkt, und die beiden beobachteten Gegenstände liegen, wird durch die beiden Vertikal-Ebenen geschnitten, und der Ausschnitt ist der beobachtete Winkel. Es bilden demnach die zwey Vertikal-Ebenen mit der Ebene des beobachteten Winkels ein dreyseitiges solides Ek, oder ein sphärisches Dreyek. So wie man den beobachteten Winkel dadurch gemessen hat, daß man das Messungs-Instrument in seine Ebene gestellt hat, so mißt man auch die Vertikal-Winkel, indem man das Instrument in die Vertikal-Ebenen stellt, und durch Messung den Winkel bestimmt, den der Scheitelpunkt und die beobachteten Gegenstände mit dem Standpunkte im Standpunkte bilden. Durch diese Messungen hat man nun die drey Seiten des sphärischen Dreyeks bestimmt; der Neigungs-Winkel der zwey Vertikal-Ebenen wird gesucht, und die sphärische Trigonometrie liefert zu diesem Behufe die zweckmässigen

Formeln. Ist nemlich die Vertikal-Fläche die durch den Standpunkt und den Gegenstand A gehet $= A$, die Vertikal-Fläche, welche durch den Standpunkt und den Punkt B gehet $= B$, bedeutet D den beobachteten Winkel, δ die Neigung beider Vertikal-Ebenen, so ist

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (D + (A - B)) \sin \frac{1}{2} (D - (A - B))}{\sin A \sin B}$$

oder nennt man H , h die Höhen der Gegenstände über dem Horizont, so ist $H = A - 90$; $h = B - 90$. so ist.

$$\sin \frac{\delta}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} (D + (H - h)) \sin \frac{1}{2} (D - (H - h))}{\cos H \cos h}$$

Die Berechnung des Winkels δ ist nach dieser Formel etwas beschwerlich, wenn man mit grosser Genauigkeit verfahren, und die Proportional-Theile der Logarithmen für die einzelnen Sekunden berechnet. Allein wenn H und h grösser als 2 bis 3 Grade sind, so muß man sich dennoch dieser Formel bedienen, weil die Aproximations-Methoden zu sehr abweichen.

Die Delambrische Aproximations-Methode gründet sich auf ein Gewühle von Reihen u. Substitutionen im allerneuesten Geschmacke. Dieser mathematische Luxus, (ich mögte ihn Pedanterie nennen) führt uns zu nichts als zur Erkenntnis, daß man die zweiten Potenzen sehr kleiner Grössen ohne beträchtlichen Fehler aus der Rechnung lassen könne, um sich dieselbe zu erleichtern. Wir werden diesen Luxus beschneiden, und dem Leser nur das vorlegen, was nothwendig und zweckmässig ist.

Die sphärische Trigonometrie giebt nebst obiger auch folgende Formel für den Winkel δ .

$$\cos \delta = \frac{\cos D - \cos A \cos B}{\sin A \sin B}, \text{ oder wenn man}$$

für A und B , H und h substituirt, und für δ , $D+X$ sezet.

$$\cos(D+X) = \frac{\cos D - \sin H \sin h}{\cos H \cos h}.$$

da $\cos(D+X) = \cos D \cos X - \sin D \sin X$ ist, so hat man

$$\begin{aligned} \cos D \cos X \cos H \cos h - \sin D \sin X \cos H \cos h \\ = \cos D - \sin H \sin h, \cos D (1 - 2 \sin^2 X) \cos H \cos h \\ - \sin D \sin X \cos H \cos h = \cos D - \sin^2 H \sin h. \end{aligned}$$

$$\text{also } \sin X + 2 \cot D \sin^2 X =$$

$$\frac{\cot D \cos H \cos h + \operatorname{cosec} D \sin H \sin h - \cot D}{\cos H \cos h}.$$

$$\text{Es ist aber } \cos H \cos h = \frac{\cos(H-h) + \cos(H+h)}{2} =$$

$$\frac{(1 - 2 \sin^2 \frac{H-h}{2}) + (1 - 2 \sin^2 \frac{H+h}{2})}{2}$$

$$\sin H \sin h = \frac{\cos(H-h) - \cos(H+h)}{2} =$$

$$\frac{(1 - 2 \sin^2 \frac{H-h}{2}) - (1 - 2 \sin^2 \frac{H+h}{2})}{2}$$

Substituirt man, so hat man nach der Reduktion

$$\begin{aligned} \sin X + 2 \cot D \sin^2 X = \operatorname{cosec} D \frac{\sin^2 \frac{H+h}{2} - \sin^2 \frac{H-h}{2}}{2} - \cot D \frac{\sin^2 \frac{H+h}{2} - \sin^2 \frac{H-h}{2}}{2} \\ \frac{\cos H \cos h}{\cos H \cos h}. \end{aligned}$$

und da $\operatorname{cosec} D - \cot D = \operatorname{Tang} \frac{1}{2} D$; $\operatorname{cosec} D + \cot D = \cot \frac{1}{2} D$ ist, so hat man endlich:

$$\sin X + 2 \cot D \sin^2 X = \frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2} D \sin^2 \frac{H+h}{2} - \cot \frac{1}{2} D \sin^2 \frac{H-h}{2}}{\cos H \cos h}.$$

Anmerkung. Die Bestimmung dieser Formel ist nur darum so weitläufig geworden, weil ich zeigen wollte, wie Herr Delambre zu derselben, und zu dem Gliede $2 \cot D \sin^2 X$ kamm, das er durch seine Reihen und

Substitutionen zu eliminiren sucht. Kürzer gelangt man zu eben derselben auf folgende Weise.

Da X ein sehr kleiner Winkel ist, so setze man $\cos X = 1$;

$\sin X = X$. so wird $\cos(D + X) = \cos D - \sin D \cdot X =$

$$\frac{\cos D - \sin H \sin h}{\cos H \cdot \cos h.}$$

und $X = \cot D (\cos H \cdot \cos h - 1) + \operatorname{cosec} D \sin H \sin h.$

$$= \operatorname{cosec} D \left(\frac{\sin^2 H + h}{2} - \frac{\sin^2 H - h}{2} \right) - \cot D \cdot \left(\frac{\sin^2 H + h}{2} + \frac{\sin^2 H - h}{2} \right)$$

$$= \frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin^2 H + h}{2} - \cot \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin^2 H - h}{2}}{\cos H \cdot \cos h.}$$

Ich sehe nicht ein, daß darin ein grosses Verdienst liege, auf grossen Umwegen, durch unzählige Gleichungen, Reihen und Substitutionen eine Formel zu finden, die spielend mittels einer einzigen sehr einfachen Voraussetzung gefunden werden kann.

So weit ist nun alles richtig; nur wird man Mühe haben Herrn *Delambre's* Rechnung zu folgen, weil er die Substitutionen und folglich einen Geometer voraussetzt, der mit allen trigonometrischen Substitutionen und algebraischen Evolutionen vollkommen bekannt ist. Von nun aber versteigt er sich in Reihen und mühesame Substitutionen, aus welchen weiter nichts erhellt, als daß wenn X , oder die Redukzions-Winkel des Winkels D sehr klein und h und H ebenfalls nur wenige Minuten betragen, man $2 \cot D \sin^2 \frac{X}{2}$, und $\cos H \cos h$, ohne merklichen Fehler aus der Rechnung lassen, und den Bogen $X = \sin X$ setzen könne, wonach in Sekunden

$$X = \frac{\operatorname{Tang} \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin^2 H + h}{2} - \cot \frac{1}{2} D \cdot \frac{\sin^2 H - h}{2}}{\sin I'}$$

Herr *Delambre* verfertigte 4 Tafeln, um die Berechnung seiner Formeln zu erleichtern. Die erste gibt den Werth von $10000 \sin \frac{H \pm h}{2}$ von Minuten zu Minuten bis auf 5 Grade. Die zweyte gibt den Werth von $\text{Tang } \frac{1}{2} D$ und $\text{Cot } \frac{1}{2} D$ durch 10000 devidiret, von 10 Minuten zu 10 Minuten bis zu 180 Grade; die dritte gibt den Werth von $\text{Sec } H$, $\text{Sec } h$. Mit den zwei ersten Tafeln begnügt man sich, wenn H und h nicht beträchtlich sind. Dadurch wird meines Dafürhaltens die Arbeit mehr erschweret als erleichtert, denn man hat zwey auch 3 Multiplikationen mit mehreren Ziffern zu verrichten, und da die Tafeln nur von Minuten zu Minuten, und bey den Tangenten von 10 Minuten zu 10 Minuten gehen, so hat man immer Proportional-Theile zu berechnen. Zum Beweise werden wir das von Herrn *Delambre* selbst gegebene Exempel anführen,

Es sey der beobachtete Winkel	.	$61^{\circ}, 09', 27'', 3 = O$
die Vertikal-Ebene A	.	$91^{\circ}, 32', 45''$.
die Vertikal-Ebene B	.	$91^{\circ}, 25', 51''$.
also ist $H + h$	.	$2^{\circ}, 58', 36$.
$H - h$	.	$0^{\circ}, 6' 54$.

$H + h$.	$+ 6, 746$.	<i>Tab 1.</i>	$H - h$.	$+ 0, 010$.	<i>Tab 1.</i>
<i>Tang</i> O .	$+ 12, 19$.	<i>Tab 2.</i>	<i>Cot</i> O	$- 34, 89$.	<i>Tab 2.</i>
	<u>67. 46.</u>			<u>$- 0, 0, 3489$.</u>	
	13. 492				
	6746				
	60714				
	<u>$+ 82'', 23374$.</u>				
	$- 0, 3489$.				
	<u>$+ 81'', 88484$.</u>				
multipliziert:	$1, 0007$.	<i>Tab 3.</i>			
	<u>$81'', 94216$.</u>		$= X$,	also $D + X = 61^{\circ}, 10', 49'', 3$.	

Wenn man die Correktion der 4ten Tafel, die allein mehr Mühe macht als alle übrigen, vernachlässiget. Das Verfahren ist folgendes:

Mit $H + h$ als Argument sucht man in der ersten Tafel, die beigeschriebenen Zahlen. Man findet $2^{\circ}, 58'$; 6,701. Man berechnet die proportionirten Theile, und hat 6,746. Eben so verfährt man mit $H - h$.

Man sucht den Winkel O in der Tangenten Tafel, und findet für die Tangente nach Berechnung der Proportional-Theile 12, 19, und auf derselben Linie für die Cotangente 34, 89.

Mit der ersten dieser zwey Zahlen wird $H + h$, mit der zweyten $H - h$ multipliziert. Man zieht die Produkte von einander ab, und hat für den Werth von X , $81''.88484$. Man schlägt die dritte Tafel nach, und findet mit den Argumenten $1^{\circ}.25', 51''$, und $1^{\circ}, 32', 45''$. 1,0007. Mit dieser Zahl wird X multipliziert, und somit hat man $X = 81''.94216$. Diese Gröſſe ist aber zu groß, und muß durch die 4te Tafel corrigirt werden.

Jeder unbefangene Leser, der kein blinder Bewunderer der neumodischen algebraischen Evolutionen ist, wird erkennen, daß diese Berechnungs-Art mühesamer ist, als selbst die Berechnung der strengen Formel, die mit 4 Logarithmen verrichtet wird. Allein man kann Herrn *Delambre* mit Recht beschuldigen, daß er mit der Kirche ums Kreuz gehe, denn wir werden unverzüglich sehen, daß er ohne seine 4 Tafeln, und seine mühesamen Multiplikationen durch die Logarithmen dasselbe, und zwar genauer hätte finden

können. Wir wollen die obige Formel wieder vornehmen, nach welcher:

$$X = \frac{\text{Tang } D. \sin^2 \frac{H+h}{2}}{\cos H. \cos h. \sin I''} - \frac{\text{Cot } \frac{1}{2} D. \sin^2 \frac{H-h}{2}}{\cos H. \cos h. \sin I''}.$$

Ein

Wir wollen einweilen $\cos H. \cos h = I$ setzen, und die Logarithmen mit 5 Dezimalen in der Berechnung gebrauchen:

<i>Compl. log</i> $\sin I''$, 5,31443.	<i>Compl. log</i> $\sin I''$, 5,31443.
<i>log</i> $\text{Tang } \frac{1}{2} D.$. 9,77166.	<i>log</i> $\text{Cot } \frac{1}{2} D.$. 0,22834.
$2 \log \sin \frac{H+h}{2}$. 16,82905.	$2 \log \sin \frac{H-h}{2}$. 14,00309.
1,91514.	9,54586-10.
1 ^{tes} Glied. 82'', 251.	2 ^{tes} Glied = 0,351.
— 2 ^{tes} Glied. 0,351	
81'', 900	

Berechnet man X durch die strenge Formel, so findet man $X = 82'', 138$. also betrüge der Fehler $0'', 238$ Sekunden oder $\frac{1}{5}$ einer Sekunde. Dafs aber diese Methode weit leichter sey, fällt jedem in die Augen; denn die beiden ersten Logarithmen sind unveränderliche Gröfsen; Hat man $\log \text{Tang } \frac{1}{2} D$, wobey man sogar die Proportional-Theile vernachlässigen kann, so hat man auch $\text{Cot } \frac{1}{2} D$. Ferners findet man in den Calletischen Logarithmen-Tafeln die *Sinus* für jede Sekunde der 5 ersten Grade; und die Multiplikazion mit 2. ist ein Kinderspiel gegen die Multiplikazion mit den grossen Zahlen der *Delambrischen* Tafeln.

Will man sich aber auch diese Mühe durch eine Tafel ersparen, so berechne man die Quadrate der Sinus von Sekunde zu Sekunde für die ersten 6 Minuten, dann

die Quadrate dieser *Sinus* von 10 zu 10 Sekunden bis zum 5ten Grade, und zwar nur mit 5 Dezimalen, und der Charakteristik. Zu jedem dieser Quadrate addire man den *logarithmus constans* 5,31443, und bringe diese berechneten Gröſſen in eine Tafel, so hat man gerade zu nur einen Logarithmus zu suchen. Eben so bequem kann man eine Tafel für die Correktion *Cos H, Cos h*, einrichten.

Man wird dem Verfasser vergönnen bey dieser Gelegenheit zu wiederholen, was er schon mehrmalen sagte, und drucken lieſs, ohne sonderliche Aufmerksamkeit zu erwecken. Man laſſe ſich ja nicht durch das *Hocus pocus* der neumodischen Rechnungs-Geometrie täuſchen. Es iſt mit derſelben wie mit der neuen Philoſophie. Wenn man das Ding recht beym Lichte beſieht, ſo ſtekt nichts dahinter. Der Nebel in den ſie ihre Operationen hüllen, verhindert die, welche keine guten Augen haben, ihnen auf die Finger zu ſehen; da ſcheint es denn, daſs ſie Mirakel wirken; Wenn man aber gute Augen hat, und die Taſchenspieler-Künſte verſtehet, ſo iſt man nicht leicht zu täuſchen. Hier zum Beyspiele war es blos darum zu thun die Gröſſe $2 \sin^2 \frac{X}{2} \cot D$ wegzupraktiziren; und da wir nun dieſes wiſſen, ſo wird nicht leicht Jemand verſucht ſeyn, die Meilenlangen Gleichungen, und Reihen der 37 und 38ten Seite nachzurechnen, und zu bewundern.

Wenn die Vertikal-Ebenen kleiner ſind als 90 Grade, das iſt, wenn die beobachteten Gegenſtände ober der Ebene des Horizontes liegen, ſo iſt $H + h = 180^\circ - A - B$. Sonſt iſt das Verfahren gerade daſſelbe. Wir wollen abermal die von Herrn *Delambre* gegebenen Daten nehmen.

Es sey also der gemessene Winkel . $42^{\circ}, 06', 10''$.
 die eine Vertikal-Ebene (*dist. Zenith*) $89^{\circ}, 59', 54''$.
 die andere $89^{\circ}, 50', 23''$
 $A + B$. $179^{\circ} 50' 17''$
 $180'' - (A + B) = H + h$. $9', 43''$
 $A - B = H - h$. $9', 31''$
 $\log \text{Constaus, } 5.31443.$. $\log. \text{Const, } 5.31443.$
 $\log \text{Taug } \frac{1}{2} D. \quad 9.58502.$. $\log. \text{Cot } \frac{1}{2} D. 0,41498.$
 $2\log \sin H + h \quad 14,29893$. $2\log. \sin H - h \quad 14,28084.$
 $\quad \quad \quad + \quad 0,19838 - 1$. $\quad \quad \quad + \quad 0,01025.$
 $\quad \quad \quad + \quad 0,1579$. $\quad \quad \quad - \quad 1.0249$
 also $X = - 0.867.$
 und der reduzirte Winkel $= 42^{\circ}. 06'. 09''. 135$

Herr *Delambre* findet: $42^{\circ}. 06'. 09''. 14.$ also beträgt der Unterschied keinen hundertsten Theil einer Sekunde. Ich habe durch Berechnung mancher hundert Winkel gefunden, daß die Delambrischen Tafeln den Redukzions-Winkel X immer zu klein geben, und daß die Berechnung mit Logarithmen der Wahrheit näher komme.

Diese Reduktion kann man sich ganz ersparren, wenn man mit einem guten Theodoliten die Winkel mißt; allein es ist nicht so leicht, als man wähnt, ihn genau in die Horizontal-Ebene zu stellen, und ihn in derselben zu erhalten.

Wenn der beobachtete Winkel reduzirt ist, so hat man den Winkel eines Kugeldreyeks, dessen Seiten drey Ebenen sind, welche durch den Mittelpunkt der Erde, und je zwey und zwey Standpunkte gehen. Da nun die Summe der drey Winkel eines Kugeldreyeks immer grösser ist als 180 Grade, so muß auch die Summe dreier un-

serer reducirter Winkel größer seyn, als die Summe der drey Winkel des Dreyeks, das die Sehnen bilden.

Es fragt sich also, wie groß die Winkel des Dreyeks der Sehnen seyn werden, wenn die Winkel des sphärischen Dreyeks gegeben sind. Als mathematische Curiosität mag diese Frage gelten. Bey der topographischen Aufnahme eines Landes kommt sie nicht vor. Will man sich aber mit der Auflösung dieses Problems amüsiren, so erwäge man, daß wenn man die drey sphärischen Winkel kennt, man auch die Seiten des Dreyeks kenne; man kennt also auch das Verhältniß der Sehnen, und somit auch das Verhältniß der Sinus der Winkel die diese Sehnen einschließen nebst ihrer Summe. Bey sehr kleinen Dreyeken wie die unsrigen kann man ohne merklichen Fehler die Sehnen den Seiten gleich setzen, und somit ohne Mühe die Winkel des Sehnendreyeks bestimmen. Allein mit einer solchen leichtfaßlichen Auflösung ist unsern modernen Archimeden nicht gedienet, auch nimmt Herr *Delambre* abermal seine Reihen und endlosen Sustitutionen vor; sie sind aber gerade dieselben, die wir schon gehabt haben, und es kommt auch hier blos darauf an, eine ungelegene Größe mit mathematischer Eleganz wegzupraktiziren.

Er berechnet zwey Seiten des Kugeldreyeks, dessen Winkel gemessen, auf das Centrum und den Horizont reduziert sind. Er nennt diese Seiten $2H$, $2h$, und den eingeschlossenen Winkel α , den Winkel der Sehnen setzt er $= A$, und sagt der Werth von A werde durch folgende Gleichung gegeben.

$$\cos A = \cos \alpha \cos H \cos h \pm \sin H \sin h.$$

Allein diese Gleichung ist unrichtig, denn in diesem Falle ist A die dritte Seite des Kugeldreyeks und nicht

der Winkel der Sehnen; doch läßt man dieses gelten, und setzt $A = \alpha + \gamma$; verfährt dann gerade so wie oben gezeigt wurde und läßt $2 \cos \alpha \sin^2 \frac{\gamma}{2}$ weg, so erhält man dasselbe Resultat nur mit verkehrten Zeichen. Was also vorhin erinnert wurde, trifft auch den vorliegenden Fall.

Von der Differenz zweyer Seiten eines Dreyekes von der dritten Seite.

So wie zuvor, so verschwendet auch hier Herr Delambre seine mathematische Anstelligkeit und lehrt durch Reihen finden, was man durch die gewöhnlichen trigonometrischen Formeln, eben so leicht finden kann. Es lohnt nicht der Mühe sich dabey aufzuhalten.

Correkzion der nahe am Horizonte beobachteten Zenith - Distanzen.

Man kennt die Distanzen des Pols vom Zenith. Man kennt ferner die Distanz eines Sternes vom Pole, und mißt seine Distanz vom Zenith in einem bestimmten Augenblicke ausser dem Meridian. Man fragt, wie groß seine Distanz vom Zenith seyn wird, wenn er in den Meridian gelangt. Die Antwort ist, die Distanz des Sternes wird dann seyn gleich der Distanz des Zeniths vom Pole, weniger der Distanz des Sternes vom Pole. Ich bekenne demnach aufrichtig, daß ich nicht verstehe, was Herr Delambre in diesem Abschnitte eigentlich will.

Untersuchung des Fehlers der dadurch entstehen kann, wenn man bey Messung der Vertikal-Winkel das Instrument nicht genau in die Vertikal-Ebene stellt.

Man kann, sagt Herr Delambre, nicht versichert seyn, daß man sein Instrument bis auf 2 oder 3 Minuten

Page 47
20.

genau in die Vertikal-Fläche gestellt habe. Er berechnet die Abweichung, die dadurch entstehen kann. Da aber niemand wissentlich sein Instrument ausser der Vertikal-Ebene stellt, und wenn es also geschieht, er nicht weiß, wie viel die Abweichung beträgt, so scheint diese Berechnung bloß ein Lückenbüßer zu seyn, und nur zum Nachhelfen zu dienen, wenn die Winkel nicht genau passen wollen.

Von der Berechnung der Azimuthal-Beobachtungen.

Page 38

Was hier gesagt wird, ist durchaus nichts neues. Jeder Geometer, der eine Vermessung dirigiren will, muß das wissen, was hier gelehrt wird, und was er nicht weiß, findet er vollständiger in allen Lehrbüchern der Astronomie.

Berechnung aller coordinirten Theile des Meridians unter der Voraussetzung, dass die Erde eine vollkommene Kugel sey.

Page 39

Es ist, wie ich mehrmalen erinnerte. Unsere neueren Geometer scheuen sich die Bahn der gemeinen aber genauen Geometrie zu wandeln. Wäre ihnen die Auflösung schwerer Probleme durch diese auch noch so sehr erleichtert, so ziehen sie dennoch vor durch Reihen und Differentiationen in den Wolken zu suchen, was ihnen vor den Füßen liegt... Wir werden den ebenen Weg wandeln und die Resultate vergleichen.

Unter dem Ausdrücke coordinirte Theile des Meridians versteht Herr *Delambre* die Breiten der Punkte *A* und *B* (*Fig. 7.*) oder die Bögen *AE* und *BD* der Meridiane *PEE* und *PDF*; den Winkel *P* oder den Neigungs-

winkel beider Meridiane; die Winkel PAB , und PBA , welche die Vertikal-Fläche ABK mit jedem der beiden Meridiane einschließen.

Von diesen Gröſsen sind gegeben:

1° der Bogen $AE = 90 - PA$; die Breite des Punkts $A = L$.

2° der Winkel PAB , das Azimuth des Punkts B auf dem Horizonte von A . *Delambre* bezeichnet ihn durch A oder

~~$180^\circ - 2$~~ $180^\circ - A$

3° die Länge des Bogens $AB = \delta$.

Man verlangt: 1° die Breite des Punkts $B = L'$

2° den Winkel PBA das Azimuth des Punkts A auf dem Horizonte des Punkts $B = 2'$. Wir nennen ihn B .

3° den Neigungswinkel P der beiden Meridiane, oder die Differenz der Stundenwinkel $= A'$ nach *Delambre*, wir werden ihn durch P bezeichnen.

AB ist ein Bogen, der in Toisen, oder Meters gegeben ist. Er muß also zuerst in Grade verwandelt werden. und alsdann ist δ ein Winkel von δ Graden.

Im Kugeldreyecke $CPBA$ kennt man demnach die Seite $PCA = 90 - L$, die Seite $BCA = \delta$, und den Winkel PAB , das gegebene Azimuth $= A$.

Die sphärische Trigonometrie liefert für diesen Fall folgende Formel:

$$\cos PCB = \cos PAB \cdot \sin BCA \cdot \sin PCA + \cos BCA \cdot \cos PCA$$

$$\text{oder } \sin L' = \cos A \cdot \sin \delta \cos L + \cos \delta \sin L$$

Setzt man in dieser Formel, weil δ ein sehr kleiner Winkel ist, $\sin \delta = \frac{\delta}{R}$, wobey R den Radius der Erde bedeutet, und $\cos \delta = 1$, so ist $\sin L' = \frac{\delta \cos A \cdot \cos L + \sin L}{R}$

und der Fehler dieser Aproximation wird keine Sekunde

pag. 60. Del.

Ein/r

betragen, wenn auch δ 30000 Toisen lang ist. Indessen ist es immer besser die strenge Formel zu berechnen, und L' nach derselben zu bestimmen:

Noch bequemer sind die Neperischen Analogien vermög welchen

$$\text{Tang } \frac{B-P}{2} = \text{Cot } \frac{1}{2} A. \frac{\text{Cos } \frac{1}{2} (L + \delta)}{\text{Cos } \frac{1}{2} (L - \delta)}$$

$$\text{Tang } \frac{B+P}{2} = \text{Cot } \frac{1}{2} A. \frac{\text{Sin } (L - \delta)}{\text{Sin } L + \delta}$$

Alle diese Formeln scheinen Herrn *Delambre* nicht bequem genug. *Il sera*, sagt er, *plus commode de chercher la difference de L et L'*: Diese Differenz nennt er dL , und um eine commode Formel für dL zu finden, so führt er uns durch 26 Gleichungen mit Substitutionen und Reihen, die einen sehr geübten Rechner fordern, wenn er ihm mit der Feder in der Hand folgen will. Aber nun wird doch endlich die Formel für dL leicht zu berechnen seyn? Hier ist sie:

$$dL = \frac{\text{Sin } \delta \text{ Cos } z + \frac{1}{2} \text{Sin}^2 \delta \text{ Sin}^2 z \text{ Tang } L}{\text{Sin } I''}$$

Nur ein Unwissender kann beredet werden, daß diese Formel leichter als die gewöhnlichen in Zahlen berechnet werden könne; allein es muß auch dem sachkennenden Leser gezeigt werden, daß ich nicht ungerecht bin, wenn ich diese von Unwissenden bewunderte Aufthürmung von Reihen und Gleichungen ein erbärmliches Machwerk nenne. Wir legen folgende Gleichung zum Grunde,

$$\text{Sin } L' = \text{Cos } A. \text{Sin } \delta \text{ Cos } L + \text{Cos } \delta \text{ Sin } L$$

für $\text{Cos } \delta = 1 - 2 \text{Sin}^2 \frac{1}{2} \delta$ substituirt man seinen Werth, so hat man

$$\text{Sin } L' - \text{Sin } L = \text{Cos } A \text{ Sin } \delta \text{ Cos } L - 2 \text{Sin } L \text{Sin}^2 \frac{1}{2} \delta.$$

Es sey $L' = L + dL$, so ist, weil $\sin L + dL = \sin L \cos dL + \cos L \sin dL$ ist, $\sin L \cos dL + \cos L \sin dL - \sin L = \cos A \sin \delta \cos L - 2 \sin L \sin^2 \frac{\delta}{2}$.

Da nun vorausgesetzt wird, dL sey ein sehr kleiner Winkel, so setzt man $\cos dL = 1$, $\sin dL = dL$; thut man dieses und dividirt durch $\cos L$, so hat man:

$$dL = \frac{\cos A \sin \delta - 2 \sin^2 \frac{\delta}{2} \operatorname{Tang} L}{\sin 1''}$$

Ich fodere nun alle Geometer, die sehen können und sehen wollen, auf zu erkennen, daß die durch 26 Gleichungen und Substitutionen gefundene Formel unrichtig sey; indem das zweyte Glied $2 \sin^2 \frac{\delta}{2}$ statt $\frac{1}{2} \sin^2 \delta$, seyn muß und $\sin^2 z$ gar nicht in der Gleichung stehen kann, dann $z = 180 - A$ (pag 60.) also $\sin^2 z = \sin^2 A$. Eine Grösse die durch keine Substitution in die Gleichung gebracht werden kann.

Da nun diese Formel ganz unrichtig ist, und die legendrische nur wenig von der andern abweicht, so wird der Leser sie leicht zu würdigen wissen.

Nun hat er auch noch z' . oder das Azimuth im Punkte B zu berechnen. Auch hier ist er mit den Neperischen Analogien, die sehr leicht dieses Azimuth und den Stundenwinkel geben, nicht zufrieden. Er findet durch eine Reihe von 14 Gleichungen und Substitutionen

$$z' = 180^\circ + z - \delta \sin z \operatorname{Tang} L - \delta \sin z \operatorname{Tang} \frac{1}{2} dL$$

Formule très simple, wie er sie nennt, wofür sie aber nicht leicht ein denkender Geometer erkennen wird.

Den Stundenwinkel P findet er wie gewöhnlich.

Es lohnt sich nicht die Mühe, daß ich dem Leser vorlege, wie Herr *Delambre* zu dieser Formel auf seinen ungeheuren Umwegen gelang; daß sie unrichtig sey, erhellet daraus, daß dL ein Faktor derselben ist. Wir übergehen also auch die durch Differenzierung und Integrirung gefundenen, und aus Reihen entwickelten Formeln. Sie haben keinen grösseren Werth als die erstern.

Wenn unsere Formeln unrichtig sind, erwiederten die französischen Geometer, wie kommt es denn, daß unsere Rechnungen mit den Beobachtungen zusammen treffen? Es kommt daher, daß sie sehr kleine Größen berechnen, und die Beobachtungen doch lange nicht so genau sind, als sie uns bereden möchten. In der ersten der Delambri-schen Formeln konnte das zweyte Glied ganz wegbleiben und $\delta L = \sin \delta \cos z$ gesetzt werden. Das Zutreffen *b* mag die Inspiration der Propheten, aber nicht die Wahrheit mathematischer Lehrsätze beweisen.

Analitische Formeln um in Funkzionen des gegebenen Breitenwinkels alle dieser GröÙe coordinirten GröÙen der Ellypse zu berechnen. Pag. 68 Delambre —

Der Anfang dieses Abschnitts ist lange das beste was zum Behufe ächter Geometrie seit Jahren geleistet wurde; Herr *Delambre* war sehr nahe daran die Methode zu finden, die der Verfasser vor 6 Jahren durch den Druck bekannt machte, und die nicht nur das Studium der Kegelschnitte ungemein erleichtert, sondern auch die Geometrie mit einem halben Hundert neuer Verhältnisse bereichert. Vermög derselben können die zu einem Punkte eines Kegelschnitts coordinirte GröÙen in Funkzionen der

unveränderlichen Grössen und einer gegebenen veränderlichen ausgedrückt werden.

Herr *Delambre* hat nur einen einzigen dieser Fälle sehr mühesam ausgearbeitet, und mag nicht wenig dabey geschwitzt haben. Die Methode des Verfassers ist allgemein, und gibt die gesuchten Gleichungen durch eine sehr leichte Substitution. Sie bestehet darin, daß man alle zu einem Punkt des Kegelschnitts coordinirten Grössen in Funkzionen eines allen Kegelschnitten gemeinen generirenden Winkels ausdrückt, und daraus alle Lehrsätze der Kegelschnitte als blosse Corollarien ableitet. Für die Ellipse sey der generirende Winkel A , und somit, wenn a , b die grosse und die kleine Axe bedeuten, und $d^2 = a^2 - b^2$ die Abscisse $= a \sin A$. die Ordinate $= b \cos A$. Unter diesen Voraussezungen findet man

den einen Radius Vektor	$= a - d \sin A$
den zweyten	$= a + d \sin A$
den Diameter der durch A gehet	$= \sqrt{a^2 - d^2} \cos A$
den Conjugirten Diameter	$= \sqrt{a^2 - d^2} \sin A$
die Tangente	$= \frac{\cos A \sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 A}{\sin A}$
die Cotangente	$= \frac{\sin A \sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 A}{\cos A}$
die Subtangente	$= a \frac{\cos^2 A}{\sin A}$
die Secante	$= \frac{a}{\sin A}$
die Cosecante	$= \frac{b}{\cos A}$
die Normale	$= \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 A$

die bis zur kleinen Axe
verlängerte Normale

$$= \frac{a}{b} \sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 A.$$

die Subnormale

$$= \frac{b^2}{a} \sin A.$$

das Segment der kleinen Axe, welches zwischen dem Mittelpunkte und ihrem Durchschnittspunkte mit

der verlängerten Normale liegt

$$= \frac{d^2}{b} \cos A.$$

der Sinus des Winkels, den die Normal-Linie mit der grossen Axe bildet

$$= \frac{a \cos A}{\sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 A} = \sin L$$

die Tangente desselben

$$= \frac{a \cos A}{b \sin A} = \tan L$$

die Tangente des Winkels, den die grosse Axe mit dem Diameter zum Punkte A bildet

$$= \frac{b \cos A}{a \sin A} = \tan C.$$

also $\tan L : \tan C = a^2 : b^2$ und so weiter.

Wird nun gefordert, man solle alle diese coordinirten Grössen in Funkzionen des Winkels L ausdrücken, so suche man aus der Gleichung für $\sin L$ den Werth von $\sin A$ und $\cos A$ und substituire ihn in allen übrigen Gleichungen. Man findet $\sin A = \frac{a \cos L}{\sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 L}$; $\cos A = \frac{b \sin L}{\sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 L}$

Setzt man mit Herrn Delambre $a = r$, $b = \sqrt{1 - e^2}$, und substituirt in den Werth der Ordinate $= b \cos A$. so hat man seine Grösse $AF = \frac{(1 - e^2) \sin L}{\sqrt{1 - e^2} \sin^2 L}$. Ein Ausdruck, den

er durch folgende Verwandlungen sucht.

i (Ein's)

$$\begin{aligned}
 AF &= b. aF = b \sin \lambda = b \cos \lambda. \text{Tang} \lambda = b \text{Tang} \lambda \sec \lambda = \\
 &= \frac{b \text{Tang} \lambda}{(1 + \text{Tang}^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} = \frac{b \text{Tang} L}{(1 + \text{Tang}^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1 - e^2) \text{Tang} L}{(1 + (1 - e^2) \text{Tang}^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \\
 &= \frac{(1 - e^2) \text{Tang} L}{(1 + \text{Tang}^2 L - e^2 \text{Tang}^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{\cos^2 L} - e^2 \frac{\sin^2 L}{\cos^2 L} \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{(1 - e^2) \cos L \text{Tang} L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(1 - e^2) \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Da er nun bey den übrigen Formeln nicht zeigt, wie er zu denselben gelangt ist, so dürfte es manchen Leser sauer werden ihm nachzurechnen, und sich zu überzeugen, daß sie richtig sind.

Der Winkel *FAT* des Herrn *Delambre* ist nicht der Breiten Winkel, sondern der Winkel, den die Tangente zum Punkte *A* mit der Ordinate macht, also dem Breiten Winkel gleich, und somit $= L$. Der Winkel *FaT* den er λ nennt, ist das Complement des Winkels, den wir den generirenden *A* nannten. Will man also $\text{Tang}(L - \lambda)$ berechnen, so braucht man hiezu keine Reihen; denn man weiß aus der geradlinigten Trigonometrie daß

$$\text{Tang}(L - \lambda) = \frac{\text{Tang} L - \text{Tang} \lambda}{1 + \text{Tang} L \text{Tang} \lambda}.$$

Da nun $\text{Tang} \lambda = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b}{a} \text{Tang} L$ ist, so ist

$$\text{Tang}(L - \lambda) = \frac{(a - b) \text{Tang} L}{a + b \text{Tang}^2 L} = \frac{(1 - \sqrt{1 - e^2}) \text{Tang} L}{(1 + (\sqrt{1 - e^2}) \text{Tang}^2 L)}$$

Ist nun die Excentrizität der Ellipse sehr klein, so ist auch $L - \lambda$ ein sehr kleiner Winkel, und man kann den Bogen der Tangente gleich setzen. Man kann auch diese Formel in verschiedene Reihen auflösen, aber wozu dieses Machwerk, da man den genauen Werth von

$L-l$ durch eine sehr leichte und bequeme Formel finden kann?

Den Winkel, den der Diameter zum Punkte A und die grosse Axe einschliessen, nemlich ACF , nennt Herr *Delambre* l , und sucht $L-l$ durch Reihen. Wir finden den genauen Werth des Winkels $L-l = CAL$ durch eine sehr leichte und bequeme Formel, denn der Winkel l ist derjenige, den wir vorhin oben C nannten, also ist $Tang l = \frac{b^2}{a^2} Tang L$. da nun $Tang L-l = \frac{Tang L - Tang l}{1 + Tang L Tang l}$ ist;

so ist, wenn man substituirt:

$$Tang(L-l) = \frac{e^2 Tang L}{1 + b^2 Tang^2 L}$$

Herr *Delambre* wird uns ja doch nicht bereden wollen, daß man in Frankreich ein Mittel gefunden habe, die Periferie der Ellypse durch irgend eine Methode zu bestimmen? Die Reihe, die er uns dafür gibt, ist weder neu noch wahr. Wenn also der Meridian nach dieser Reihe berechnet wurde, und den neuesten Nachrichten zu Folge, die fortgesetzten Messungen mit den älteren und den beobachteten bis auf Zolle zusammentreffen, so wissen wir in Deutschland, was wir von den Messungen und den Beobachtungen zu halten haben. Immerhin mag man, wenn man durchaus den Meridian berechnen will, sich dieser Reihe oder einer bequemern bedienen; allein man muß uns dann nicht bereden wollen, daß man mittels solcher aproximirter Formeln und Reihen das Maas der Natur bis auf Linien gefunden habe.

Setzt man voraus, daß die Erde ellyptisch sey, und hat man mit der größten Genauigkeit in zwey verschiedenen Breiten L und L' zwey Sekunden Bögen ge-

messen, so kann man, wenn m , und n diese Längen, R und r , die zu den Breiten L und L' gehörigen Halbmesser der Krümmung bedeuten, folgendes setzen,

$$R \text{ Arc. } L'' : r \text{ Arc. } L'' = m : n. \text{ also}$$

$$R : r = m : n,$$

$$\frac{a^2 b^2}{(a^2 - d^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}} : \frac{a^2 b^2}{(a^2 - d^2 \sin^2 L')^{\frac{3}{2}}} = m : n.$$

$$a^2 - d^2 \sin^2 L' : a^2 - d^2 \sin^2 L = m^{\frac{2}{3}} : n^{\frac{2}{3}}.$$

setzt man auch hier $a = I$, $d = e$, so ist

$$\frac{e^2 = m^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{2}{3}}}{m^{\frac{2}{3}} \sin^2 L - n^{\frac{2}{3}} \sin^2 L'} = \frac{1 - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}}}{\sin^2 L - \left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{2}{3}} \sin^2 L'}$$

*Berechnung eines Bogens des Meridians auf dem
elliptischen Sphäroid, Fig. 8*

Eigentlich wird hier von etwas anderem gehandelt. Es wird nemlich die Aufgabe gelöst: Wenn die Breite eines Ortes A auf dem elliptischen Sphäroid, seine Distanz D von einem bestimmten Punkte B , und das Azimuth des Punkts B gegeben sind, die Breite von B , das Azimuth von A auf dem Horizonte von B , und den Stunden-Winkel, oder die Differenz der Längen zwischen A und B zu bestimmen,

Ich habe mit vieler Aufmerksamkeit, die von Fehlern strotzenden Gleichungen und Formeln des Herrn *Delambre* studiert. Ich bin daraus nicht klug geworden. Vielleicht sind andere glücklicher. Ich komme in Versuchung zu muthmassen, daß sie wie die Formeln und Gleichungen eines neuen sehr berühmten, aber wenig gelesenen Buchs ein scientisches Gallimathias seyen, das nur dazu dienen soll, einem glüklichen und geschikten

Page 77
Del. Fig. 23
u. 24.

Tatoniren den Anstrich mathematischer Gewifsheit, und Eleganz zu geben. Ich glaube, man mufs mehr als ein Geometer, ja wohl ein Hexenmeister seyn, um zu errathen, woher Herr *Delambre* seine Behauptungen, die er zum Grunde seiner Rechnungen legt, nehme. So sagt er pag 77. *Nous connoissons AM et BO. du moins en supposant l'applatissement connu.* Nun sind *AM* und *BO* die bis an die kleine Axe verlängerten Normal-Linien. Wären dieselbe nun bekannt, so fände man alles übrige mit einem Federzuge, die Bestimmung von *BO* ist das schwerste der Aufgabe.

fig. 8

Die gegebenen Gröfsen sind der Halbmesser des Aequators $= a$, das Verhältnifs der Axen $= 333: 334 = \frac{a}{b}$;

Die Distanz der Punkte *A* und *B* oder vielmehr die auf die Meeres-Fläche reduzirte Distanz der Standpunkte *S* und *Z* $= D$ oder D' , das Azimuth des Punkts *B* auf dem Horizonte von *A*. $= A$. die Breite des Punkts *A* $= L$. Man sucht: die Differenz der Längen der Punkte *A* und *B* $= P$, die Breite des Punkts *B* $= L'$; das Azimuth des Punkts *A* auf dem Horizonte von *B* $= A'$.

* *Latitude*

Die Standpunkte bey Vermessungen sind nie am Ufer des Meers und auf der Oberfläche desselben. Die Höhe des Standpunktes wird berechnet, und es ist also *AZ* eine gegebene Gröfse. Bey jedem Standpunkte wird auch der Vertikal-Winkel *RZS* gemessen.

Man berechne die Linie *AM* durch die Formel.

$$AM = \frac{R}{1 - e^2 \sin^2 L}$$

dazu addire man *AZ*, die Höhe des Standpunktes ober der Meeresebene, so hat man $ZM = AM + AZ$, und so-

mit kennt man im Dreycke SZM zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel. Man kann also mit der größten Genauigkeit, ohne Reihen und mühesame Substitutionen den Winkel SMZ bestimmen. Diesen Winkel bezeichnet Herr *Delambre* durch δ , und sucht seinen Werth pag. 80. Hier wimmeln die Fehler, und nimmt man auch die Erraten-Tafel zu Hilfe, so wird man daraus nicht klug, denn die Tafel corrigirt Fehler in die Rechnung. Der Text hat:

$$\sin^2 \frac{1}{2} AMB = \frac{\frac{1}{4} (AB)^2}{1 - e^2 \sin^2 L \cos^2 \frac{1}{2} dL}$$

und da dL sehr klein, so setzt er $\cos dL = 1$. somit wird

$$\sin \frac{1}{2} AMB = \frac{\frac{1}{2} AB}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

und löset man diesen Radikal Ausdruck in eine Reihe auf so werden alle Glieder positiv; somit

$$\sin \frac{1}{2} AMB = \frac{1}{2} AB \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} e^4 \sin^4 L + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} e^6 \sin^6 L \right).$$

folglich, wenn man nur die zwey ersten Glieder nimmt und mit 2 Multipliziert

$$\delta = 2 \sin \frac{1}{2} AMB = AB \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L \right)$$

die Erraten Tafel Corrigirt: $AB \left(1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L \right)$.

und dieser Correktion gemäß haben die Französischen Geometer hier ihre Azimuthe berechnet.

Wir haben unser δ auf eine mehr geometrische Art, ohne Tatoniren gefunden. Wir gehen weiter.

Im Kugeldreycke $MPBA$, kennt man die Seite $PMA = 180^\circ - L$, die Seite $BMA = \delta = AMB$ und den Winkel PAB das gegebene Azimuth des Standpunkts B auf

dem Horizonte des Standpunkts A . Man findet also durch die Neperischen Analogien, 1° den Winkel APB , die Differenz der Längen der Punkte A und B . 2° den Winkel PBA , und 3° die Seite PMB .

Da L gegeben ist, so kennt man $CM = R \frac{(1-e^2) \sin L}{(1-e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$.

Da man nun im Meridiane des Punkts B , nebst den beiden Axen a und b , und der Excentrizität d , die Abscisse CM und den Winkel PMB kennt, so findet man meiner Methode gemäß BM auf folgende Weise:.

Man ziehe BT senkrecht auf PG und es sey $BM = z$, so ist

$$z^2 \sin^2 M = \frac{a^2}{b^2} ((b + CM - z \cos M) \cdot (b - CM + z \cos M))$$

$$\text{also: } (b^2 \sin^2 M + a^2 \cos^2 M) z^2 - 2a^2 CM \cos M \cdot z = a^2 (b^2 - CM^2).$$

$$\frac{z^2 - 2a^2 C \cdot M \cos M \cdot z}{a^2 - d^2 \sin^2 M} + \frac{a^4 CM^2 \cos^2 M}{(a^2 - d^2 \sin^2 M)^2}$$

$$= \frac{a^4 b^2 - a^4 CM^2 - a^2 b^2 d^2 \sin^2 M + a^2 d^2 CM^2 \sin^2 M + a^4 CM^2 \cos^2 M}{(a^2 - d^2 \sin^2 M)^2}$$

$$= \frac{a^2 b^2 (a^2 - (d^2 + CM^2) \sin^2 M)}{(a^2 - d^2 \sin^2 M)^2}, \text{ folglich}$$

$$z = \frac{a^2 CM \cos M + ab \sqrt{a^2 - (d^2 + CM^2) \sin^2 M}}{a^2 - d^2 \sin^2 M} = BM$$

Da z bestimmt ist, so kennt man im Dreyecke CMB die Seiten CM und BM nebst dem obengefundenen Winkel $CMB = PMB$; man findet also den Winkel MCB , und den Centrum-Winkel $BCK = MCB - 90$.

Es sey nun BKO die Normale des Punktes B , so ist BKE die gesuchte Breite des Punktes $B = L'$ und es ist

$$\frac{a^2}{b^2} \cdot \text{Tang } BCK = \text{Tang } L'.$$

Nun erst kann man genau das Azithmuth des Punkts A auf den Horizonte des Punkts B finden.

Man wird zweifelsohne erkennen, daß dieses Verfahren zwar streng geometrisch, aber die Berechnung der Formeln sehr beschwerlich sey. Allein ich erwiedere hierauf 1° daß unsere Geometer dafür hielten, es sey keine streng geometrische Auflösung dieses Problems möglich, 2° daß wenn man einmal die richtigen Resultate kennt, Aproximations Methoden leicht zu finden seyen, 3° daß die Delambrischen Formeln nicht merklich leichter seyen, als die streng geometrischen. Dieses wird aus folgender Berechnung erhellen:

Gegebene Größen.

Der Halbmesser des Aequators $= R = a = 6375740$ Metres.

das Verhältniß der Axen $= \frac{b}{a} = \frac{333}{334}$.

also die kleine Axe $= b = 6356650$.

die Excentrizität $= e = d = 493186$.

die Breite von München $= L = 48^{\circ}.08'.20'' = ALP$.

$AMP = 41^{\circ}.51'.40'' = 90^{\circ} - z$.

das Azimuth von Schweidenkirchen auf dem Horizonte von München $= A = 3^{\circ}.29'.46'' = PAB$.

die gerade Distanz der Thürme $= 40881$ Metres $= AB$

die Höhe des Beobachtungs-Punkts im Lieben Frauenturm über dem Meere $= 600$ Metres. $= AZ$.

Von der Refraktion corrigirter Vertikal-Winkel, zwischen dem Zenith von München, und Schweidenkirchen $= 90^{\circ}.13'.55'' = RZS$.

Man suche $AM = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - d^2} \sin^2 L} : \log d = 5,6930113$
 $\log \sin L = 9,8720191$
 $\log : d \sin L = 5,5650304$.

Bis an die Axe verlängerte Normale

$$a = 6375740.$$

$$d \sin L = 367308$$

$$a + d \sin L = 6743048 \dots \log. 6,8288563.$$

$$a - d \sin L = 6008432 \dots \log. 6,7787611$$

$$\log. a^2 - d^2 \sin^2 L = 13,6076174$$

$$\log. \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 L} = 6,8038087.$$

$$2 \log. a = 13,6090614.$$

$$\text{Comp. log. } \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 L} = 3,1961913$$

$$\log. AM = 6,8052527$$

$$AM = 6386340.$$

$$AZ = 600$$

$$AM + AZ = 6386940.$$

$$D = 40881.$$

$$MZ + D = 6427821 \dots \text{Compl. log. } 3,1919361.$$

$$MZ - D = 6846059 \dots \log. 6,8025042.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{RZM}{2} = 0,0017581$$

$$\log. \text{Tang } \frac{\text{Differt.}}{2} = 9,9961984.$$

$$\text{Winkel } \frac{RZM}{2} = 45^\circ, 06', 57'', 50$$

$$\text{— Differenz } \frac{2}{2} = 44^\circ, 44', 57'', 24$$

$$\delta = \text{Winkel } SMZ = 0^\circ, 22', 00'', 26.$$

die Französischen Geometer fanden $\delta = 0^\circ, 22', 00'', 56$

Berechnung des Kugeldreyeks $MPAB$.

$$\text{der Winkel } \frac{1}{2} PAB = 1^\circ, 44', 53''$$

$$\text{die Seite } PMA = 90^\circ - L = 41^\circ, 51', 40''.$$

$$\text{die Seite } AMB = \delta = 0^\circ, 22', 00'', 26; \text{ also}$$

$$\frac{1}{2} (PMA + AMB) = 21^\circ, 06', 50'', 13$$

$$\frac{1}{2} (PMA - AMB) = 20^\circ, 44', 49'', 87$$

$$\log. \cot \frac{1}{2} PAB = 1,5154326.$$

$$\log. \sin. \frac{1}{2} (PMA - AMB) = 9,5493038,77.$$

$$\text{Compl. log. } \sin \frac{1}{2} (PMA + AMB) = 0,4434279.$$

$$\log. \text{Tang } \frac{(PBA - BPA)}{2} = 1,5081643,77.$$

$$\log \cot \frac{1}{2} PAB \quad . \quad . \quad = 1,5154326.$$

$$\log \cos \frac{1}{2} (PMA - AMB) \quad = 9,9708825.$$

$$\text{Comp.} \log \cos \frac{1}{2} (PMA + AMB) = \underline{0,0301807}$$

$$\log. \text{Tang } \frac{1}{2} (PBA + BPA) \quad = 1,5164958.$$

$$\frac{1}{2} (PBA + BPA) = 88^{\circ}, 15', 22'', 27.$$

$$\frac{1}{2} (PBA - BPA) = 88^{\circ}, 13', 20'', 86.$$

$$BPA = 0^{\circ}, 02', 01'', 51.$$

$$PBA = 176^{\circ}, 28', 43'', 21.$$

$$180^{\circ} - PBA = 3^{\circ}, 31', 16, 79.$$

Der Winkel BPA ist die Differenz der Längen, oder der Neigungswinkel der Meridiane. Die Französischen Geometer fanden denselben $= 0^{\circ}, 02', 01'', 53$.

Der Winkel PBA , oder vielmehr sein Supplement wird von ihnen für das Azimuth von München auf dem Horizonte von Schweidenkirchen angenommen, und $= 3^{\circ}, 31', 16'', 78$ gefunden. Er ist es aber nicht, das Azimuth kann nur gefunden werden, wenn die Breite des Punktes B bestimmt ist. Erst dann kennt man im Kugeldreyecke $OPBA$, die Seite POB , den Winkel APB , und durch Auflösung des Dreyeks SOZ die Seite BOA . Freilich ist augenscheinlich, daß das wahre Azimuth, und das, welches wir dafür gelten lassen, um sehr wenig unterschieden seyen; allein, wenn man wie in Frankreich auf ein Zusammentreffen von Zollen Anspruch macht, so dürfen Dezimal = Sekunden nicht vernachlässigt werden.

Berechnung der dritten Seite PMB .

$$\log. \sin PMA (41^{\circ}, 51', 40'') = 9,8243388.$$

$$\log. \sin PAB (3^{\circ}, 29', 46) = 8,7851931.$$

$$\text{Compl.} \log. \sin PBA (3^{\circ}, 31', 16'', 79) = \underline{1,2116906}$$

$$\log. \sin PMB \quad = 9,8212225.$$

$$PMB = 41^{\circ}, 29', 42'', 31.$$

Berechnung von CM. $2 \log d = 11,3860226.$ Formel pag. 49.

$$\log \sin L = 9,8720191.$$

$$\text{Compl. log. } \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 L} = 3,1961913$$

$$\log CM = 4,4542330. \quad CM = 28459.$$

Berechnung von BM.

$$\log. d = 5,6930113$$

$$\log. \sin M = 9,8212225$$

$$\log. d \sin M = 5,5142338. \quad d \sin M = 326764.$$

$$a = 6375740.$$

$$d \sin M = 326764.$$

$$a + d \sin M = 6702504.$$

$$\log. 6,8262370.$$

$$a - d \sin M = 6048976.$$

$$\log. 6,7816818.$$

$$\log. a^2 - d^2 \sin^2 M = 13,6079188.$$

$$\log \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 M} = 6,8039594.$$

$$\sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 M} = 6367360.$$

$$\log CM = 4,4542330.$$

$$2 \log a = 13,6090614.$$

$$\log \cos M = 9,8744891.$$

$$\text{Compl. log } \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 M} = 6,3920812.$$

$$\log. a^2 CM \cos M = 4,3298647. \quad 1^{\text{tes}} \text{ Glied} = 21373 \text{ der Formel}$$

$$\frac{a^2 - d^2 \sin^2 M}{a^2 - d^2 \sin^2 M}$$

für 5. pag 49

3 = BM

Es sey: $\sqrt{(a^2 - d^2 \sin^2 M) - CM^2 \sin^2 M} = N.$

$$\log CM = 4,4542330.$$

$$\log \sin M = 9,8212225.$$

$$\log. CM \sin M = 4,2754555. \quad CM \sin M = 18866.$$

$$\sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 M} = 6367360.$$

$$CM. \sin M = 18866.$$

$$\sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 M} + CM \sin M = 6386226. \quad \log. 6,8052445.$$

$$- CM \sin M = 6348494. \quad \log. 6,8026718.$$

$$2 \log N = 13,6079163.$$

$$\log. N = 6,8039581.$$

Man findet also BM = 6086390.

Berechnung des Kugeldreyekes *POBA*:

Bekannte Seiten: $POB = 41^{\circ}, 29', 39'', 21.$ $\log. 9,8211913.$

$BOA = 0^{\circ}, 21', 59,74.$ $\text{Compl. log. } 2,1938542.$

Bekannter Winkel $BPA = 0^{\circ}, 2', 01'', 51.$ $\log. 6,7701975.$

$\log \sin PAB = 8,7852430$

$PAB = 3^{\circ}, 29', 47'', 45.$ *

$\log. \text{Tang. } PAB = 8,7860552.$

$\log. \text{Cos. } BOA = 9,9999911.$

$\log. \text{Cot. 1te Segm. } 8,7860463$ $1\text{tes Segment} = 86^{\circ}, 30', 13'', 73.$

$\log \text{Tang } BPA = 6,7701480.$

$\log \text{Cos. } POB = 9,8744949$

$\log \text{Cot } 2\text{ten Seg.} = 6,6446429$ $2\text{tes Segment} = 89^{\circ}, 58', 29''.$

$A\alpha + \alpha P = 176^{\circ} 28', 42'', 73$
 $= \alpha P$

Wahrer Azimuth $PBA = 176^{\circ}, 28', 42'', 73$

das vorige $= 176,28', 43'', 21.$

Differenz $= 0^{\circ} 00'' 00'' 48.$

Der Unterschied ist freylich klein, denn er beträgt nur eine halbe Sekunde. Allein dieses berechnete Azimuth ist nun die Grundlage zu allen folgenden; und ein Multipulum von kleinen Fehlern gibt zuletzt einen grossen.

Die Berechnung ist etwas mühesam, aber was hindert uns denn, wenn wir grosse Vermessungen vor uns haben, die Werthe von *BO*, die allein von dem Breiten-Winkel abhängen, in eine Tabelle zu bringen, die für Bayern nur für 5 Grade berechnet werden dürfte? Dann ist ja die ganze Rechnung eine Kleinigkeit, und weit leichter als die Berechnung der Delambrischen Formeln, zu denen er 6 Tafeln braucht.

* Winkel, den die Flächen POB und BOA einschließen, und dessen Spitze in O ist. Er ist somit kleiner als der erstere. * Um ihn zu finden, muß BO berechnet, und zu BS der Höhe des zweyten Standpunkts ober der Meeresebene addiret werden. Dann kennt man im Dreyeke SOZ zwey Seiten und den eingeschlossenen Winkel, und somit auch den Winkel SOZ . **

* PMA

Nun kennt man im sphärischen Dreyeke $OPBA$, die Seite AOB , den ihr gegenüberliegenden Winkel BPA , und die Seite $POB = 90^\circ - L'$, also kann man das wahre Azimuth bestimmen.

$POB = 41^\circ 29' 39'' 21$ (pag: 48) also $L' =$
Berechnung von BO . $2R - POB = 48^\circ 30' 20'' 79$! —

der Logarithmus von $d = 5,6930113$. $a = 6375740$

$\log \sin L' = 48^\circ 30' 20'' 79 = 9,8744944$

$\log d \sin L' = 5,5675057$ $d \sin L' = 369407$

$a + d \sin L' = 6745147$. $\log = 6,8289915$

$a - d \sin L' = 6006333$. $\log = 6,7786098$

$\log a^2 - d^2 \sin^2 L' = 13,6076013$.

$\log \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 L'} = 6,8038107$.

$2 \log a = 13,6090614$.

$C. L. \sqrt{a^2 - d^2 \sin^2 L'} = 3,1961993$.

$\log BO = 6,8052607$.

$BO = 6386500$.

$+ BS = 446$.

$SO = 6386946$

$SZ = 40881$.

$SO + SZ = 6427827$

$SO - SZ = 6346065$

$Comp. \log. SO + SZ = 3,1919357$.

$\log. SO - SZ = 6,8025064$

$\log. Tang. \frac{1}{2} W SZ = 89^\circ 46' 05'' = 9,9906613$.

$\log. Tang. \frac{1}{2} Differenz = 9,9851034$.

Die halbe Summe = $44^\circ 23' 02'' 5$

die halbe Differ. = $44^\circ 01' 02'' 76$.

der Winkel $BOA = 0^\circ 21' 59'' 74$.

D

** Diese Folgerung ist unrichtig! — Denn $W SZ$ ist nicht
derselbe Winkel auf SO wie er auf SM ist !!!

Berechnung des Kugeldreyekes $POBA$.

• PB

Bekannte Seiten: $POB = 41^\circ, 29', 39'', 21.$ $\log. 9,8211913.$

$BOA = 0^\circ, 21', 59,74.$ $\text{Compl. log. } 2,1938542.$

Bekannter Winkel $BPA = 0^\circ, 2', 01'', 51.$ $\log. 6,7701975.$

$\log \sin PAB = 8,7852430$

$PAB = 3^\circ, 29', 47'', 45.$

$\log. \text{Tang. } PAB = 8,7860552.$

$\log. \text{Cos. } BOA = 9,9999911.$

$\log. \text{Cot. 1te Segm. } 8,7860463$ 1tes Segment $= 86^\circ, 30', 13'', 73.$

$\log \text{Tang } BPA = 6,7701480.$

$\log \text{Cos. } POB = 9,8744949$

$\log \text{Cot 2ten Seg.} = 6,6446429$ 2tes Segment $= 89^\circ, 58', 29''.$

wahrer Azimuth $PBA = 176^\circ, 28', 42'', 73$

das vorige $= 176,28', 43'', 21.$

Differenz $= 0^\circ 00'' 00'' 48.$

Der Unterschied ist freylich klein, denn er beträgt nur eine halbe Sekunde. Allein diesse berechnete Azimuth ist nun die Grundlage zu allen folgenden; und ein Multipulum von kleinen Fehlern gibt zuletzt einen grossen.

Die Berechnung ist etwas mühesam, aber was hindert uns denn, wenn wir grosse Vermessungen vor uns haben, die Werthe von BO , die allein von dem Breiten - Winkel abhängen, in eine Tabelle zu bringen, die für Bayern nur für 5 Grade berechnet werden dürfte? Dann ist ja die ganze Rechnung eine Kleinigkeit, und weit leichter als die Berechnung der Delambrischen Formeln, zu denen er 6 Tafeln braucht.

Es ist nicht zu vermuthen, daß, wer immer das Delambrische Werk und diese Bögen gelesen hat, behaupten werde, daß dieses Zusammentreffen ein Beweis sey, daß die Delambrischen Formeln mathematisch richtig seyen; denn schon die erste, nemliche: $\delta = \frac{K. (1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 L)}{R. \sin I''}$ ist unrichtig und sollte (+) statt (—) haben.

Mir ist noch dermalen nicht klar, wie es die französischen Geometer machten, um die genaue Einstimmung ihrer Rechnungen mit den meinigen zu bewirken. Ich fand immer beträchtliche Abweichungen, wenn ich nach denselben rechnete; und damit jeder sich überzeugen könne, so seze ich die Rechnung hieher.

Der Bequemlichkeit wegen substituiren man a für R , d für e , so wird

$$\delta = K \frac{(a^2 - \frac{1}{2} d^2 \sin^2 L)}{a^3 \cdot \sin I''}$$

$$2 \log d \sin L = 11,1300608.$$

$$\text{Comp. log. } 2 \quad \underline{9,6989699.}$$

$$\log. \frac{1}{2} d^2 \sin^2 L = 10,8290307$$

$$\log \sqrt{\frac{1}{2} d^2 \sin^2 L} = 5,4145154. \quad \sqrt{\frac{1}{2} d^2 \sin^2 L} = 414440.$$

$$a = 6375740.$$

$$\sqrt{\frac{1}{2} d^2 \sin^2 L} = \underline{414440}$$

$$a + \sqrt{\frac{1}{2} d^2 \sin^2 L} = 6790180. \quad \log 6,8318816.$$

$$a - \sqrt{\frac{1}{2} d^2 \sin^2 L} = 5961300. \quad \log. 6,7753410.$$

$$\text{Comp. log. } \sin I'' = 5,3144251.$$

$$\log. k = 40881. = 4,6115215.$$

$$\text{Compl. log. } a^3 = \underline{9,5864079.}$$

$$\log \delta = 3,1195771.$$

$$\delta = 1316'', 97 = 21', 56'', 97.$$

also ist δ um 4 Sekunden zu klein. Nimmt man aber die Formel *le Gendre's*, wo $\sin \delta = \frac{K}{(a^2 - d^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$

so ist $\log. K = 4,6115215$.

$\text{Compl. log } a^2 - d^2 \sin^2 L = 3,1961907$.

$\log. \sin \delta = 7,8077122$ und somit $\delta = 22', 5''$.

also um beinah 5 Sekunden zu groß.

Setzt man aber $\sin \delta = \frac{K}{AM} = \frac{K \cdot (a^2 - d^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}{a^2}$ so

findet man $\sin \delta = 7,8062688$, und somit $\delta = 22', 00'', 38$.

und dieses kommt der Wahrheit sehr nahe. Herr *Delambre*, irrt sich also, wenn er pag. 81. behauptet, *que sa formule ne differe pas sensiblement de celle du Citoyen le Gendre*. Allein es muß jedem einleuchten, daß $K = AB$ kein *Sinus* eines Kreises vom Radius AM sey; und daß dieses Verhältniß nur bey sehr kleinen Winkeln der Wahrheit nahe kommen könne.

Ich bin sehr weit davon alle Aproximations-Methoden verwerfen und aus der praktischen Geometrie verbannen zu wollen. Nur dagegen protestire ich, daß die Kunst, bequeme Faullenzer zu machen, nicht der Geometrie gleichgestellt und die Faulenzer-Formeln uns nicht für mathematische Lehrsätze aufgedrungen werden; darüber klage ich, daß man um dieses Machwerks willen die ächte Geometrie vernachlässiget, und sie als Elementar Geometrie tief unter das Tappen im Nebel setzt, das man Transzendente Geometrie, die höhere Geometrie nennt, ungeachtet rein nichts Geometrisches an ihr ist; daß man die Geometrie in eine mechanische Evolution von Zeichen verwandelt hat, die nichts oder Unsinn bedeuten, und daß man das Zusammentreffen der Resultate der sinnlose-

sten Operationen als einen Beweis ihrer Wahrheit, und ihrer Erhabenheit gelten lasse; daß man endlich durch die Dorne, mit denen man den Weg zu dieser sublimen Wissenschaft besäet hat, viele gute Köpfe abhält, denselben zu betreten. Da unsere Archimede nichts als Bücher machen, und seit 200 Jahren rein nichts nützliches und brauchbares geliefert haben, so ist die Geometrie zu einer spekulativen Wissenschaft herabgesunken, von der man zwar mit einer dermalen unverdienten und nur ererbten Achtung spricht, mit der man sich aber nicht abgeben mag. Doch wir kehren zu unseren Formeln zurück.

Es ist nicht ohne, daß die Berechnung der durch die strenge Mathematik gefundenen Verhältnisse etwas mühsam sey. Allein man sieht doch, was man macht, und wie man zu diesen Formeln gelangte; doch man stelle sich ja nicht vor, daß die Berechnung der Delambrischen Formeln leicht sey. Um sich die Rechnung zu erleichtern, sagt Herr *Delambre*, er habe sich 6 Tafeln entworfen. Dieser Erleichterung sind auch unsere geometrischen Formeln fähig. In Bayern ist der Unterschied der Breiten höchstens 5 Grade, und 48° die Breite von München. Man berechne CM und $d \sin L$ von 10 Sekunden zu 10 Sekunden für alle Grade von 45 bis 51 Graden, so ist die Hälfte der ganzen Arbeit erspart, und die streng geometrische Berechnung weit leichter als die aproximierte der französischen Geometer.

Von dem Unterschiede zwischen der Summe der drey sphärischen Winkel eines Kugeldreyeks, und der Summe der drey Winkel des Dreyekes der Sehnen der Seiten.

Wenn man von drey Stand-Punkten A, B, C , die drey Winkel gemessen und auf den Horizont reduziert hat, so

sind wegen der Kugelgestalt der Erde diese drey Winkel sphärische Winkel, und ihre Summe ist somit grösser als zwey rechte Winkel. Die Summe der drey Winkel der Grade der Seiten ist gleich zwey rechten Winkeln. Die Differenz dieser Summen ist es, was die französischen Geometer *Excès Sphérique* nennen. Dieser Ueberschuß kann streng geometrisch bestimmt werden; denn da man die drey sphärischen Winkel kennt, so kann man die drey Seiten genau berechnen, und kennt ihre Chorden, und da man nun die drey Seiten des Dreyecks der Chorden kennt, so kann man die Winkel derselben bestimmen. Allein diese Berechnung ist etwas mühesam. Um sich diese Mühe zu ersparren, ziehet man 180° von der Summe der drey sphärischen Winkel ab, und diesen Ueberschuß vertheilt man nach geometrischer Proportion auf die 3 Winkel, das ist, man zieht von jedem sphärischen Winkel seine proportionirte Rate ab. Dieses galt als eine Aproximation. Herr *Delambre* bemühet sich diese Aproximation in einen geometrischen Lehrsatz zu verwandeln, und zu beweisen, daß dieses Tatoniren aus den Grundbegriffen der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden könne. Wir werden uns die Mühe ersparren den angeblichen Beweis zu bemängeln, und sehen die Repartition des Ueberschusses nach wie vor als eine Aproximation an, welche der Wahrheit so nahe kömmt, als man fodern kann, wenn der Ueberschuß 6 bis 7 Sekunden beträgt. Daß dieser Ueberschuß sehr klein bey unsern Vermessungsdreyecken seyn müsse, wird aus folgender Betrachtung erhellen.

Es seyen A, B, D die drey Seiten eines Kugeldreyecks, so sind die Chorden $2 \sin \frac{1}{2} A$, $2 \sin \frac{1}{2} B$, $2 \sin \frac{1}{2} D$. Ist d = dem Chorden Winkel, δ = dem sphärischen Winkel, so ist:

$$\sin^2 \frac{1}{2} A + \sin^2 \frac{1}{2} B - 2 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \cos d \sin^2 \frac{1}{2} D.$$

und setzt man für $\cos d = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} d$ seinen Werth, so ist

$$\sin \frac{1}{2} d = \frac{\sqrt{\sin \frac{1}{2} D + (\sin \frac{1}{2} A - \sin \frac{1}{2} B) \sin \frac{1}{2} D - (\sin \frac{1}{2} A - \sin \frac{1}{2} B)}}{4 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B}$$

auch ist:

$$\sin \frac{1}{2} \delta = \frac{\sqrt{\sin (\frac{1}{2} D + (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)) \sin (\frac{1}{2} D - (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B))}}{\sin A \sin B}.$$

Wir haben kein Dreyek, dessen Seite 60000 Metres lang wäre, und folglich auch keine Seite die 30 Minuten groß wäre. Nun ist der *Sinus* 15 Minuten um keinen Millionen Theil vom Bogen unterschieden, also kann man $\sin \frac{1}{2} A \approx \frac{1}{2} A$ setzen, und um so viel mehr $\sin (\frac{1}{2} D + (\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B)) \approx \frac{1}{2} D + \frac{1}{2} A - \frac{1}{2} B$. Diesemnach sind die Zahlen in beiden Gleichungen gleich, und da $\sin A \approx 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ ist, so ist

$$\sin \frac{1}{2} d : \sin \frac{1}{2} \delta \approx \sqrt{\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B} : 1.$$

Dieses mag hinreichen, um zu zeigen, daß der Ueberschuß für jeden Winkel keine zwey Sekunden betragen könne, und daß, was darüber ist, ganz auf die Rechnung der Fehler komme. Das Theorem der Repartition ist also ein Lückenbüßer, im geometrischen Gewande. Ich erkenne, daß die französischen Geometer nicht wenig zu Verbesserung unserer geometrischen Praxis beygetragen haben, aber von aller Charlatanerie bin ich ein erklärter Feind, und ich kann nicht, ohne sowohl über die Taschenspieler als über die Zuseher zu lachen, die Mühe betrachten, die man sich giebt, die Fehler unserer Arbeiten in Theoreme zu verwandeln. Die gar zu große Genauigkeit, das gar zu pünktliche Zusammentreffen, ist mir immer verdächtig. Als Herr *Laplace* uns mit Körperzerlegungen amüsirte,

bey denen er den $\frac{1}{1200}$ eines Grades berechnete, so war kein Chemiker in Deutschland, der nicht laut über seine mirakulose Anatomie lachte; und so kann uns wohl gegönnet seyn zu schmunzeln, wenn man uns versichert, bey der grossen Meridians - Messung treffe alles bis auf Linien zu, ungeachtet auch nicht eine der berechneten Grössen nach strengen Formeln berechnet wurde.

Von der Höhe der Spizen der Dreyeke ober der Ebene des Meeres, und von der Refraktion.

Wenn das Messungsinstrument ein Bordaischer Kreis ist, so hat man noch einige Correktionen anzubringen. Man visirt auf die höchsten Spitzen der Signale, kann sich aber nicht mit seinem Instrumente auf diese Spitzen stellen. Dadurch werden die beobachteten Vertikalwinkel zu klein. Es seyen *A* und *C* *Fig. 9.* die Spizen zweyer Thürme. Der Beobachter ist in *B* und misst den Vertikalwinkel *ZBC*. Allein der wahre Vertikalwinkel ist *ZAC*. Dieser ist leicht zu finden, denn man kann *AB* messen, und *AC* gleich beim ersten Ueberschlage bis auf wenige Metres bestimmen. Man kennt also im Dreyeke *ABC* zwey Seiten und einen Winkel, folglich auch den äussern Winkel *ZAC*. Allein Herrn *Delambre* ist diese Auflösung und Redukzion viel zu leicht. Er erschweret sich die Aufgabe, um Reihen und Differentialen anbringen zu können, die denen, welche nur das wahre und nützliche suchen, entbehrlich sind.

Es sey in *D* die Spitze eines dritten Thurms. Man hat denn die Winkel *CBD*, *ZBC* und *ZBD* gemessen. Man kennt ferner *AB*. Verlangt man den Winkel *CAD*, so hat man zwey sphärische Dreyeke zu berechnen. In dem

Fig. 9.
Fig. 25. Del.

ersten kennt man die drey Flächen, nemlich ABD , ABC , und CBD . Man kennt also auch den Neigungs-Winkel der Flächen ABC , und ABD .

Hat man durch die Höhe AB die Distanzen AD und AC . und die Winkel ABC und ABD , die Winkel BAD und BAC bestimmt, so kennt man im zweyten sphärischen Dreyeke die Seiten BAD und BAC , und den eingeschlossenen Winkel, und somit findet man die dritte Seite CAD , welche somit der rektifizierte Winkel ist, und auf den Horizont reduziert wird. Hiezu kommt noch die Correktion wegen der Refraktion. Abbreviaturen liessen sich freilich manche bey so geringen Grössen anbringen; aber wozu diese undankbare Arbeit, da man mit einem guten Theodoliten, wie die Reichenbachischen, sich das ganze müheseeelige Rechnungswesen ersparren kann. Die französischen Geometer versichern, daß sie mit dem Borda'schen Kreise die Winkel weit genauer als mit dem Theodoliten messen können, weil bey Vervielfältigung der Messungen die Fehler auf ein Mittel repartiert werden. Allein wenn die Fehler alle positiv, oder alle negativ wären, so hätte man dennoch nur eine fehlerhafte mittlere Proportional-Größe, und dann hat man eine solche Menge von Nebenmessungen und Reduktionen, daß Fehlern nicht leicht vorzubeugen ist, wo hingegen man nur die Reduktion aufs Centrum, und wenn man im Centrum stehet, gar keine Reduktion bedarf, wenn man mit den Theodoliten die Winkel mißt. Es lohnt also nicht die Mühe sich länger bey diesem Gegenstande aufzuhalten. Doch kann ich nicht umhin etwas über die Refraktion zu sagen.

Man nimmt als unläugbare Wahrheit an, daß die Luft strahlenbrechend sey. Ich war nie so glücklich einen Ver-

such zu sehen, der mich von diesem Saze überzeugt hätte. Alles was man als Beweis anzuführen pflegt, ist die Analogie und dafs die Rechnungen unserer Astronomen nicht mit ihren Beobachtungen zusammentreffen würden, wenn wir keine Strahlenbrechung annehmen.

Daraus dafs alle flüssige und feste durchsichtige Körper strahlenbrechend sind, folgt nicht, dafs ein Luftförmiger Körper es auch sey. Die Analogie begründet Muthmassungen, wo keine auffallende *ratio disparitatis* ist, aber gründet keinen Beweis. Auch komme ich hart daran zu glauben, dafs unsere Astronomen unfehlbar sind, wenigstens sind sie nicht allwissend, sonst würden sie folgende Zweifel gegen die Refrakzion aufzulösen gewußt haben.

Die Refrakzionskraft der Luft kann neben dem Newtonischen Systeme nicht bestehen. Sind siebenerley Lichtstrahlen von ungleicher Brechbarkeit, so müssen, wenn ein Stern am Horizonte erscheint, die brechbaresten zuerst unser Aug treffen. Also wären die ersten Sonnenstrahlen, ein Gemenge von violeten blauen und grünen Strahlen. Allein fängt man diese ersten Strahlen bey ganz heiterem Horizonte in einer *Camera Obscura* auf, so findet man sie vom schönsten und hellsten Roth; also sind es die am mindesten brechbaren Strahlen, welche zuerst unser Aug treffen; und folglich kann die Luft nicht strahlenbrechend seyn. Den Versuch, den ich unzählige male gemacht habe, kann man leicht widerholen. Indessen kommt es freilich auf die Beschaffenheit der Augen an, denn, da die Newtonianer die gelben Haare des Apolls weiß sehen, so konnte ihnen auch das Scharlachfarbe violet scheinen.

Wäre die Luft strahlenbrechend, so wäre keine Mondesfinsterniß möglich. Die Atmosphäre der Erde bildet eine Kugel, die somit gleich einem Brennglase wirken, und den Schatten der Erde verkürzen muß. Man berechnet die Länge des Erdschattens auf 216 Erddurchmesser. Beträgt die Horizontal-Refraktion 30 Minuten, so kann dieselbe nur 74 Erddurchmesser lang seyn. Nun hat man aber gefunden, daß die refringirende Kraft der Luft größer werde, je näher man dem Pole kommt. In Schweden soll sie weit mehr als einen Grad betragen. Man seze, sie betrage einen Grad; so könnte der Erdschatten keine 32 Erddurchmesser lang und müßte weit breiter als hoch seyn. Wir hätten also nie eine Total Mondesfinsterniß, und wann wir eine hätten, so zöge der Erdschatten, als ein schmaler Streif über die Mondsscheibe weg. Nun sind aber mehrere Total-Mondesfinsternisse beobachtet worden.

Ein dritter Grund ist folgender: Bey Sternbedeckungen durch den Mond verschwindet der Stern so schnell, als würde er ausgelöscht; daraus folgern unsere Astronomen, daß der Mond keine Atmosphäre habe. Allein würden wir diese Behauptung nicht äusserst unwahrscheinlich finden, wenn sie nicht unseren vorgefaßten Meinungen günstig wäre? Es ist mehr als wahrscheinlich, daß der Mond ein Körper von gleicher Art als unsere Erde sey, also sind wohl auch Gewässer, Dämpfe und luftförmige Körper auf demselben. Warum soll denn gerade hier die Analogie nicht gelten, die wir so gerne gelten lassen, wenn sie unsere alberne Systeme bestätigen?

Der Mond soll keine Atmosphäre haben, weil sonst unsre Rechnungen nicht zutreffen! Weil sonst unsere Sy-

steme falsch wären! Als Beweise kann ich solche Gründe nicht annehmen, und ich muthmasse, daß wir schon längst den Schlüssel zu diesem Geheimnisse gefunden hätten, wenn wir wüßten, daß wir ihn nicht haben.

Was haben die Astronomen auf diese Einwendungen geantwortet? Noch hat keiner darauf geantwortet. Auch sehe ich nicht ein, daß man etwas kluges antworten könnte.

Zum Schluß, erlaube mir der Leser nur einige Worte gegen das Reihen-Unwesen zu erinnern. Wenn zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben sind, so hat man für einen der unbekannten Winkel folgende Gleichung $Tang A = \frac{a \sin C}{b - a \cos C} = \frac{a}{b} \frac{\sin C}{1 - \frac{a}{b} \cos C} = \frac{a \sin C}{b} +$

$$+ \frac{a^2}{b^2} \sin C \cos C + \frac{a^3}{b^3} \sin C \cos^2 C + \frac{a^4}{b^4} \sin C \cos^3 C$$

$$+ \frac{a^5}{b^5} \dots = \frac{a}{b} \sin C + \frac{1}{2} \frac{a^2}{b^2} \sin 2C + \frac{1}{3} \frac{a^3}{b^3} \sin^2 3C$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{a^4}{b^4} \sin 4C + \frac{1}{5} \frac{a^5}{b^5} \sin 5C \text{ etc.} \quad \text{Neu ist diese}$$

Erfindung nicht, denn diese Verwandlung hat schon Euler. Nur wahr ist es nicht, daß diese zwey Reihen gleich seyen; denn die zwey ersten Glieder ausgenommen ist jedes n^{te} Glied der ersten Reihe grösser als das n^{te} der zweyten. Im dritten Gliede ist $\sin C \cos^2 C = \sin C - \sin^3 C$, um $\frac{\sin^3 C}{3}$ grösser als $\frac{\sin 3C}{3}$, denn $\frac{\sin 3C}{3} = \frac{3 \sin C - 4 \sin^3 C}{3}$; das 4te Glied ist um $\frac{\sin^2 C \cos C}{4}$ grösser als $\frac{\sin 4C}{4}$, und so weiter.

Wenn $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{n}$

eine Reihe wäre, und man machte jedes Glied ausser

den beiden ersten um die Hälfte kleiner, so hätte man

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots + \frac{1}{2^n}$$

so wären dennoch diese Reihen gleich, und somit ein Ganzes weniger einem Theile gleich dem Ganzen. Wer denkt nicht bey solchen Absurditäten an die Ungereimtheit einiger Neoterischen Philosophen, die ernsthaft behaupten, daß man um ein grosser Philosoph zu werden, die Gesetze des gesunden Menschenverstandes und die Regeln der Logik abschwören müsse; daß ein Satz desto wahrer und erhabener sey, je ungereimter und nonsensikalischer er ist; daß der Grundsatz des Widerspruchs in der Speculation nicht gelte, und daß philosophische Sätze nur in so ferne wahr sind, als sie einander widersprechen? Auch finden sich schon Mathematiker, die ernsthaft behaupten, es sey nicht wahr, daß das Ganze grösser sey als seine Hälfte. Unsre widersprechenden Grundsätze der sogenannten höheren Geometrie führen uns auf palpable Absurditäten, und diese werden in geometrische Lehrsätze verwandelt um jene zu retten; daraus muß wohl endlich eine palpable Finsterniß entstehen, und wirklich ist die Geometrie bereits dahin gekommen, daß man seiner Augen nicht mehr bedarf, sondern sich wie die in egyptischer Nacht Wandelnden mit den Fingerspizen forthilft. Des Herrn *Laplace* Weltsystem hat auch nicht ein Kupfer, weil... je nun weil man den, der keine Augen hat, oder nicht sieht, da er in Finsternissen wandelt, leicht leiten kann; weil dadurch allen Einwendungen vorgebeugt wird, die man aus den Construktionen ableiten könnte.

Und wozu nützt denn die obige Lieblings-Reihe des Herrn *Delambre*? Etwa zu Erleichterung der Rechnung? Allein, wen kann man denn bereden, daß die Reihe:

$\frac{a}{b} \sin C + \frac{a^2}{b^2} \frac{1}{2} \sin 2C + \frac{a^3}{b^3} \frac{1}{6} \sin 3C$ leichter zu berech-

nen sey als: $\frac{1}{\frac{b}{a} \operatorname{Cosec} C - \cot C} ?$

Was werden wir aus diesen Bemerkungen folgern? Etwa daß die Vermessungen der französischen Geometer schlecht sind? da müßte ich gegen meine Ueberzeugung sprechen. Sie haben die Genauigkeit ihrer typographischen Arbeiten weiter getrieben als irgend eine andere Nation; sie haben dieselben auf eine sehr zweckmässige Art organisirt; und sie haben eine Genauigkeit erreicht, die man bisanhero nicht für möglich hielt. Allein wenn sie uns bereden wollen, daß alles bis auf Linien und Centesimal-Sekunden zutrefte, daß sie dieses Zutreffen den vor-
trefflichen Formeln, die ihre Archimede aus der höheren Geometrie ableiteten, verdanken, so werden sie nur bey solchen Glauben finden, die im geometrischen Fache an blinden Glauben gewöhnet sind. Darum schrieb ich eben diese Blätter, theils um das wissenschaftliche Publikum zu überzeugen, daß die Behauptung, die französischen Arbeiten seyen nicht gut, ihre Methoden verwerflich, ungegründet sey; theils auch um darzuthun, daß bey topographischen Vermessungen, und den hiezu erforderlichen Rechnungs-Operationen die höhere Mathematik ganz entbehrlich seye und daß man durch diese weder bequemere noch genauere Formeln findet. Dem Verfasser sind die Einwendungen gegen die französischen Operationen bekannt. Er fand, daß sie öfters vom Mißverstand, oder vom Mangel an hinreichenden Sprachkenntnissen herrührten; auch wurden neue Methoden vorgeschlagen, welche dieselben Resultate gaben, oder auf Unbequemlichkeiten führten, die noch grösser waren, als die, welchen man

ausweichen wolte. Es wird indessen jeder Leser einsehen, daß wir, die wir nun auf den Fußstapfen der Franzosen wandeln, leicht weiter gehen könnten als sie, und es uns somit leicht wäre, eine Landesvermessung noch zweckmässiger einzurichten. Allein was uns vielleicht hindern dürfte, in diesem Fache etwas Grosses auszuführen, ist der Mangel an einer hinreichenden Menge brauchbarer Geometer. Diese Wissenschaft findet leider bei uns zu wenig Aufmunterung.

Von einigen besonderen sehr zweckmässigen Berechnungsmethoden.

Auf der 135ten Seite und den nachfolgenden liefert der Herr *Delambre* die Berechnung zweyer Formeln, die bey topographischen Vermessungen vorzüglich brauchbar sind. Allein er liefert sie ohne Beweise, und beruft sich auf *Cagnolis* Trigonometrie, die hier nicht zu haben ist. Es wird demnach dem Leser nicht unangenehm seyn, den Beweis hier zu finden.

Das erste Problem ist folgendes:

In dem Dreyeke *ABC* (*Fig. 10.*) sind Seiten und Winkel bekannt. In einem Punkte *O* mißt man die Winkel $AOB = m$, und $BOC = n$, Man fodert die Distanzen *AO*, *BO*, *CO* zu berechnen.

Es sey $AB = a$, $BC = b$, $CA = c$.

Man verlängere *AO* und *CO*, so ist der Winkel $DAB = AOB + OBA$; Nennt man ihn *u*, so ist $OBA = u - m$, also $CBO = C + m - u$; und $FCB = C + m + n - u$. Es sey $u = \frac{1}{2}(C + m + n) = z = S - z$, so ist $FCB = S + z$. Im Dreyeke *AOB* ist: 1° ; $\sin DAB : BO = \sin AOB : AB$.
oder $\sin S - z : BO = \sin m : a$

Im Dreycke BOC : 2° : $\sin FCB$: $BO = \sin BOC$: BC . oder

$\sin S + z$: $BO = \sin n$: b . also

$$\frac{\sin (S+z)}{\sin (S-z)} = \frac{\sin S \cos z + \sin z \cos S}{\sin S \cos z - \sin z \cos S} = \frac{a \sin n}{b \sin m} = \text{Tang } X.$$

Dividirt man das erste Glied im Zähler und im Nenner durch $\sin S \cos z$, so hat man:

$$\frac{1 + \text{Tang. } z \cot S}{1 - \text{Tang. } z \cot S} = \text{Tang } X. \text{ oder}$$

$$1 + \text{Tang. } z \cot S = \text{Tang } X - \text{Tang } z \cot S. \text{Tang } X$$

daraus wird:

$$\frac{(\text{Tang } X - 1)}{(\text{Tang } X + 1)} \text{Tang } S = \cotang (X + 45) \text{Tang } S = \text{Tang } z.$$

Da man nun z kennt, so kennt man $S - z = u$.

und es ist: $BO = \frac{a \sin u}{\sin m}$; $AO = BO \frac{\sin (n-m)}{\sin u}$;

$$CO = BO. \frac{\sin (C + m - u)}{\sin 2 S - u}.$$

Wer in den Substitutionen der trigonometrischen gleichgültigen Gröſſen nicht geübt ist, und Cagnolis Trigonometrie nicht besitzt, würde ohne diese Anleitung lange gesucht haben, ehe er gefunden hätte, wie man zur Gleichung

$$\frac{(\text{Tang } X - 1)}{(\text{Tang } X + 1)} \text{Tang } S = \text{Tang } z \text{ gelange.}$$

*Berechnungs-Exempel für den Fall, wo der Stand-Punkt
O ausser dem Dreyeke liegt.*

$$A = 72^{\circ}, 42'$$

$$M = 37^{\circ}, 28'$$

$$B = 41^{\circ}, 36'$$

$$N = 69^{\circ} 55'$$

$$C = 65 42.$$

$$M + N = 107^{\circ}, 23'$$

$$\frac{B + M + N}{3} = \frac{148^{\circ} 59'}{3} = S = 74^{\circ}, 29', 30''$$

$$z = 34^{\circ}, 37', 01'', 8.$$

$$a = 3761, 33$$

$$S + z = 109^{\circ}, 06', 31'', 8$$

$$b = 3940, 60$$

$$S - z = 39^{\circ}, 52', 28'', 2.$$

$$c = 2740, 00$$

$$S - z - M = 2^{\circ}, 24', 28'', 2$$

$$S + z - N = 39^{\circ}, 11', 31'', 8$$

$$180^{\circ} - (S - z) - A = 67^{\circ}, 25', 31'', 8$$

$$180^{\circ} - (S + z) - C = 5^{\circ}, 11', 28'', 2.$$

$$\log a = 3,5753414$$

$$\log. \sin N = 9,9727554$$

$$\text{Com. } \log b = 6,4044746$$

$$\text{Com. } \log. \sin M = 0,2158823$$

$$\log \text{Tang } X = 0,1684537.$$

$$X = 55^{\circ}, 50', 36'$$

$$+ 45^{\circ}$$

$$X + 45^{\circ} = 100^{\circ} 50', 36'$$

$$\log. \cot (X + 45^{\circ}) = 9,2822689.$$

$$\log \text{Tang. } S = 0,5567665$$

$$\log. \text{Tang } z = 9,8390354.$$

$$BO = a \frac{\sin(S-z)}{\sin M} = b \frac{\sin(S+z)}{\sin N}$$

$$\log a = 3,5753414$$

$$\log \sin(S-z) = 9,8069313$$

$$\text{Comp. log } \sin M = 0,2158823$$

$$\log BO = 3,5981550.$$

$$\log b = 3,5955254$$

$$\log \sin(S+z) = 9,9753865$$

$$\text{Comp. log } \sin N = 0,0272446$$

$$\log BO = 3,5981565.$$

$$AO = BO \frac{\sin(S-z) - M}{\sin(S-z)} = \frac{c \sin(S+z) + C}{\sin(M+N)}$$

$$\log BO = 3,5981552$$

$$\log \sin(S-z) - M = 8,6233759.$$

$$\text{Comp. l. } \sin(S-z) = 0,1930687.$$

$$\log AO = 2,4145998.$$

$$\log c = 3,4377506.$$

$$\log \sin(S+z) + C = 8,9565480.$$

$$C, l. \sin(M+N) = 0,0203027$$

$$\log AO = 2,4146013.$$

$$CO = BO \frac{\sin(S+z) - N}{\sin(S+z)} = \frac{c \sin(S+z) + A}{\sin(M+N)}$$

$$\log BO = 3,5981552.$$

$$\log \sin(S+z) - N = 9,8006645$$

$$\text{Comp. log } \sin(S+z) = 0,0246148$$

$$\log CO = 3,4234345$$

$$\log c = 3,4377506.$$

$$\log \sin(S+z) + A = 9,9653810.$$

$$\text{Comp. log } \sin(M+N) = 0,0203027$$

$$\log CO = 3,4234343$$

$$BO = 3964,2$$

$$AO = 259,8$$

$$CO = 2650,56$$

*Berechnungs-Exempel für den Fall, wo der Stand-Punkt
O innerhalb des Dreyekes liegt.*

$$A = 72^\circ, 42'$$

$$M = 129^\circ, 34'$$

$$B = 41^\circ, 36'$$

$$M = 147, 22'$$

$$C = 65^\circ, 42'$$

$$M + N = 276^\circ, 56'$$

$$a = 3761,33$$

$$+ B = 41^\circ 36'$$

$$b = 3940,60$$

$$\frac{M + N + B}{2} = \frac{318^\circ, 32'}{2} = S = 159^\circ, 16'$$

$$c = 2740$$

$$Z = \frac{4^\circ, 18', 44'', 22}{2}$$

$$S + z = 163^\circ, 34', 44'', 22$$

$$(S - z) - M = 25^\circ, 23', 15'', 78$$

$$S - z = 154^\circ, 57', 15'', 78$$

$$(S + z) - N = 16 \ 12 \ 44 \ 22. \quad (S - z) + A - 180 = 47^\circ, 39', 15'', 78$$

$$(S + z) + C - 180 = 49^\circ, 16', 44'', 22$$

$$\log a = 3,5753414$$

$$\log. \sin N = 9,7317989$$

$$\text{Comp. log. } b = 6,4044746$$

$$\text{Comp. log. } \sin M = 0,1130109$$

$$\log \text{ Tang } X = 9,8246258$$

$$X = 33^\circ 44', 01'', 47$$

$$+ 45 = 45$$

$$X + 45 = 78^\circ, 44', 01'', 47$$

$$\log \cot (X + 45) = 9,2993054$$

$$\log \text{ Tang } S = 9,5781043$$

$$\log \text{ Tang } z = 8,8774097$$

$$BO = \frac{a \sin (S-z)}{\sin M} = \frac{b \sin (S+z)}{\sin N}$$

$$\log a = 3,5753414. \quad BO = 2065,6.$$

$$\log. \sin (S-z) = 9,6266955 \quad AO = 2091,9.$$

$$\text{Comp. log. } \sin M = 0,1130109. \quad CO = 2040,2.$$

$$\log. BO = \underline{3,3150478.}$$

$$\log. b = 3,5955254.$$

$$\log. \sin (S+z) = 9,4513156.$$

$$\text{Comp. log. } \sin N = \underline{0,2682011}$$

$$\log BO = \underline{3,3150421}$$

$$AO = BO, \frac{\sin (S-z) - M}{\sin (S-z)} = c \frac{\sin (S+z) + C}{\sin (M+N)}.$$

$$\log BO = 3,3150478.$$

$$\log \sin (S-z) - M = 9,6321950$$

$$\text{Comp. log. } \sin (S-z) = \underline{0,3733045}$$

$$\log AO = \underline{3,3205473}$$

$$\log c = 3,4377506.$$

$$\log \sin (S+z) + C = 9,8796090.$$

$$\text{Comp. log. } \sin (M+N) = \underline{0,0031875}$$

$$\log AO = \underline{3,3205471.}$$

$$CO = BO \frac{\sin (S+z) - N}{\sin (S+z)} = c \frac{\sin (S-z) + A}{\sin M+N}.$$

$$\log BO = 3,3150478.$$

$$\log (S+z) - N = 9,4459114$$

$$\text{Comp. log } \sin (S+z) = \underline{0,5486844}$$

$$\log. CO = \underline{3,3096436}$$

$$\log c = 3,4377506$$

$$\log \sin (S-z) + A = 9,8686972$$

$$\text{Comp. log. } \sin (M+N) = \underline{0,0031875}$$

$$\log CO. = \underline{3,3096353}$$

Die zweyte Aufgabe ist nicht minder nützlich; Man kennt AB . Man sucht die Distanzen OC , OA , OB , CA , CB . und misst also die Winkel BCA , und ACO im Standpunkte C , die Winkel AOB , und BOC im Standpunkte O .

Mittels dieser bekannten Grössen können die gesuchten Distanzen bestimmt werden. Herr *Delambre* gibt den Beweis des Grundverhältnisses, aber führt den Leser nicht auf die Entwicklung seiner Formel; dieses wollen wir nachtragen.

Es sey $AB=m$, $AOB=A$; $BOC=B$, $OCA=C$, $BCA=D$.

Im Dreyeke CAO ist $CA = \frac{CO \cdot \sin(A+B)}{\sin(A+B+C)}$

Im Dreyeke COB ist $CB = \frac{CO \cdot \sin B}{\sin(B+C+D)}$.

folglich: $\frac{CA}{CB} = \frac{\sin A+B \cdot \sin(B+C+D)}{\sin B \cdot \sin(A+B+C)}$

Man kennt also im Dreyeke ABC , eine Seite $BC=m$, das Verhältniß der Seiten CA und CB , das wir *Tang X* nennen wollen, und die Summe der, der Seite AB anliegenden Winkel $= 180 - D$.

Nun ist die Summe der Seiten, die einen Winkel einschliessen, zu ihrer Differenz wie die Tangente der halben Summe beyder Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Danun $CA=CB \cdot \text{Tang } X$, so ist: $\frac{CA-CB}{CB} = \text{Tang } X - 1$

$\frac{CA+CB}{CB} = \text{Tang } X + 1$. also

$\frac{CA-CB}{CA+CB} = \frac{\text{Tang } X - 1}{\text{Tang } X + 1} = \text{Tang } X - 45$

und, somit: $CA + CB : CA - CB = 1 : \text{Tang}(X - 45^\circ)$.
 oder $\text{Tang } 90 - \frac{1}{2} D \text{ Tang } z = 1 : \text{Tang}(X - 45^\circ)$.
 und die Tangenten der halben Differenz oder
 $\text{Tang } z = \text{Tang}(X - 45^\circ) \cdot \text{Tang } 90 - \frac{1}{2} D$.
 also die zwey Winkel selbst oder $CBA = 90 - \frac{1}{2} D + z = p$
 $CAB = 90 - \frac{1}{2} D - z = q$.

Nun ist es leicht alle Distanzen zu bestimmen. Um sich die Arbeit zu erleichtern, berechnet man sie nur mit 5 Dezimalen, wenn dieselben nicht grösser als 10000 sind. Diese Methode thut ungemeine Dienste, wenn es darauf ankommt, in grossen Dreyeken die Lage der in denselben genommenen Punkte, zu bestimmen oder ausserhalb derselben gut gelegene Standpunkte zu wählen. Ich fand diese Aufgabe in keinem unserer deutschen Lehrbücher. Tempelhof gibt zwar das erste Problem, aber keine für die Anwendung bequeme Formel. Die Delambrische Formel ist bequemer als die meinige, weil sie der natürlichen Sinus und Tangenten nicht bedarf.

Die französischen Geometer haben gar manche kleine Vortheile, mittels deren sie ihre Rechnungen abkürzen. Sind sie auch nicht streng geometrisch, so geben sie doch approximirte Resultate, die von den wahren um äusserst geringe Quantitäten abweichen. Dieses beweiset zwar nicht, dafs die Franzosen es in der Theorie weiter gebracht haben als andere Nationen, aber dafs sie in topographischen Arbeiten mehr Uebung und mehr Gewandtheit haben. Ihre Regierung hat Millionen auf topographische Vermessungen verwendet; da finden also hunderte von Geometern Brod, und somit verlegen sich viele auf das Studium der Geometrie. Bey uns thun die Regierungen für diese edle Wissenschaft soviel als nichts. Auch ist bey uns dieses Fach sehr schlecht bestellet. Zum

Beweise will ich nur anführen, daß die wenigen unserer Feldmesser, die ein geradlinigtes Dreyek zu berechnen im Stande sind, sich durch den Titel Trigonometer in den Meldungszetteln auszeichnen. Indessen brauchte die Regierung keinen grossen Aufwand zu machen, um das Studium der Geometrie in Flor zu bringen. Sie hat beym Forstamte, beym Wasser- und Strassenbaue, bey Communal und Staats- Bauwesen so manche einträgliche Dienste zu vergeben. Sie brauchte also nur zu verfügen, daß niemand zu solchen Diensten befördert werden solle, der nicht strenge Prüfungen über alle Theile der Geometrie und der Mechanik bestanden hätte. Sie dürfte nur verfügen, daß die Praktikanten bey diesen *Burraux*, die in denselben ihre Zeit vertändeln, und beinah ohne Unterricht, und Vorbereitung in die Provinzen gesendet werden, zweckmässigen Unterricht erhielten: allein, leider, gibt es in Deutschland Länder, wo die sogenannten Civil- Ingenieurs auch nicht die ersten Elemente der Geometrie verstehen, und wo man dem Duzend nach Ingenieurs en Chef nachweisen könnte, die kaum wissen, daß ein Dreyek drey Seiten habe. Wird man zu Entschuldigung dieser Unordnung anführen, daß die Regierungen den Mängeln vormaliger Zeiten nicht augenblicklich abhelfen können, und daß sie die Leute brauchen müssen, wie sie dieselben findet? Dann müßte man nachweisen, daß für den Nachwuchs gesorgt sey.

Dieses ist aber leider nicht der Fall. Ich sehe nirgends in Deutschland irgend eine Anstalt, um gute brauchbare Geometer für die verschiedenen Zweige der Administration zu bilden; und doch ist eine Polytechnische Schule weit nützlicher als eine Universität. Höchstens wird bey der Artillerie nothdürftiger Unterricht gege-

ben, und selbst in den Cadetenschulen ist derselbe sehr mager. Da müssen wir uns also nicht wundern, wenn die Franzosen eine weit grössere Menge brauchbarer Geometer haben, und im topographischen Fache weit mehr als wir zu leisten im Stande sind.

Was die Speculation und die Theorie betrifft, so mag schon blos diese Abhandlung Delambres hinreichen, um zu beweisen, daß die Franzosen nichts voraus haben. Seit Einführung des Differential.Kalkuls und der Theorie der Attraktion sind die Geometrie und die Mechanik stationar, und die Arbeiten unserer Archimede beschränken sich auf leere Speculationen, und eben so künstliche als unnütze algebraische Evolutionen. Nicht eine neue Wahrheit, nicht eine das Studium der Geometrie erleichternde Methode ist von ihnen erfunden worden. Nicht ein zweydeutiger Begriff ist von ihnen berichtigt worden.

Dem Zufalle oder der Gewandtheit mechanischer Arbeiter, und nicht unseren Geometern verdanken wir unsere neuerfundenen künstlichen Maschinen. Selbst auch dann, wenn uns der Zufall auf nützliche Entdekungen führt, gelingt es unseren Theoretikern nicht eine auch nur halbbefriedigende Erklärung dieser Erscheinung zu geben. Der Stofsheber bleibt noch immer ein unerklärbares Räthsel. In dieser Rücksicht ist es disseits des Rheines wie jenseits. Man beschuldige mich nicht, daß ich gegen die Verdienste so vieler berühmter Männer ungerrecht sey. Man beschäme mich dadurch, daß man die nützlichen Meisterwerke unserer Geometer aufzähle. Bücher machten sie mehr als wir brauchen; aber was machten sie sonst? Selbst die Vorschritte der Astronomie verdanken wir blos unseren bessern Werkzeugen, der grösseren Menge genauer Beobachtungen. Die Geometrie

zeigt uns schon lange nicht mehr den Weg im Labyrinth der Wissenschaften; sie schleicht den Fußstapfen des Praktikers nach, und berechnet seine Schritte. *Olim non sic.*

Zum Beschluß dürfte die Auflösung folgenden Problems dem Leser nicht unwillkommen seyn.

A u f g a b e.

Aus drey beobachteten Höhen eines Gestirnes und den gegebenen Zwischenzeiten der Beobachtungen die Deklination des Gestirnes, und die Breite des Orts der Beobachtung zu bestimmen.

A u f l ö s u n g.

Es seyen *Fig. (II.)* *AG*, *BH*, und *CK* die drey gegebenen Höhen. Man seze dafür *H*, *H'*, *H''*, *AZ*, *BZ*, *CZ* sind die Complementary dieser Höhen, und also gegebene Größen. Ist *P* der Pol, so ist *AP* = *BP* = *CP* das Complement der gesuchten Declination, und *PZ* das Complement der gesuchten Polhöhe.

Es sey *APZ* = *S* der Stunden-Winkel für die Höhe *AG*; sind also *APB* = *A*, *APC* = *B* gegebene Größen, so hat man folgende Gleichungen:

$$\text{Im Dreyeke } APZ: \cos S = \frac{\cos AZ - \cos PZ \cdot \cos AP}{\sin PZ \cdot \sin AP}$$

$$\text{oder} \quad \cos S = \frac{\sin H - \cos PZ \cdot \cos AP}{\sin PZ \cdot \sin AP}$$

$$\text{Im Dreyeke } BPZ: \cos (S+A) = \frac{\sin H' - \cos PZ \cdot \cos AP}{\sin PZ \cdot \sin AP}$$

$$\text{Im Dreyeke } CPZ: \cos (S+B) = \frac{\sin H'' - \cos PZ \cdot \cos AP}{\sin PZ \cdot \sin AP}$$

$$\text{also } \frac{\cos S - \cos(S+A)}{\cos S - \cos(S+B)} = \frac{\sin H - \sin H'}{\sin H - \sin H''}$$

und wenn man die Fraktion linker Hand durch $\cos S$ dividirt

$$\frac{(1 - \cos A) + \tan S \sin A}{(1 - \cos B) + \tan S \sin B} = \frac{\sin H - \sin H'}{\sin H - \sin H''}$$

daraus wird:

$$\tan S = \frac{(\sin H - \sin H'')(1 - \cos A) - (\sin H - \sin H')(1 - \cos B)}{(\sin H - \sin H') \sin B - (\sin H - \sin H'') \sin A}$$

Hiemit ist S bestimmt, und somit kennt man auch $(S+A)$ und $(S+B)$. Diese Formel ist zwar nicht für die Logarithmen bequem; dennoch ist sie leicht zu berechnen

$$\text{Es ist: } 2 \sin PZ \sin AP = \cos(PZ-AP) - \cos(PZ+AP)$$

$$2 \cos PZ \cos AP = \cos(PZ-AP) + \cos(PZ+AP)$$

also ist im Dreyeke APZ :

$$\begin{aligned} \cos S \cdot (\cos(PZ-AP) - \cos(PZ+AP)) \\ = \sin H - \frac{\cos(PZ-AP)}{2} - \frac{\cos(PZ+AP)}{2} \end{aligned}$$

$$\text{also } \cos(PZ-AP) = \sin H - \frac{(1 - \cos S) \cdot \cos(PZ+AP)}{(1 + \cos S)}$$

$$\text{und wenn man } \sin^2 \frac{S}{2} \text{ für } \frac{(1 - \cos S)}{2}; \cos^2 \frac{S}{2} \text{ für } \frac{(1 + \cos S)}{2}$$

setzt.

$$\cos(PZ-AP) = \frac{\sin H - \sin^2 \frac{S}{2} \cdot \cos(PZ+AP)}{\cos^2 \frac{S}{2}}$$

Im Dreyeke BPZ ist ebenfalls

$$\cos(PZ-AP) = \frac{\sin H' - \sin^2 \frac{(S+A)}{2} \cdot \cos(PZ+AP)}{\cos^2 \frac{(S+A)}{2}}$$

Aus diesen zwey Gleichungen entwikelte man:

$$\begin{aligned} \cos(PZ+AP) &= \frac{\sin H. \cos^2 \frac{(S+A)}{2} - \sin H'. \cos^2 \frac{S}{2}}{\sin^2 \frac{S}{2} \cos^2 \frac{(S+A)}{2} - \cos^2 \frac{S}{2} \sin^2 \frac{(S+A)}{2}} \\ &= \frac{\sin H. \cos^2 \frac{(S+A)}{2} - \sin H'. \cos^2 \frac{S}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{(2S+A)}{2}} \end{aligned}$$

Und wenn man diesen Werth in eine der beiden vorigen substituirt

$$\cos(PZ-AP) = \frac{\sin^2 H'. \sin \frac{S}{2} - \sin H. \sin^2 \frac{(S+A)}{2}}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{(2S+A)}{2}}$$

Da man somit die Summe und die Differenz der Seiten PZ und AP kennt, so kennt man die Seiten selbst.

Auch diese Formeln können nicht in Faktoren aufgelöst und unmittelbar durch die Logarithmen berechnet werden. Der Herr Professor Haupt, der in dem 4n Band, der Supplemente des Bodeischen Astronomischen Jahrbuchs eine Auflösung dieses Problems gab, und behauptet, daß seine Formeln durch die Logarithmen berechnet werden können, täuscht sich und seine Leser. Es kann zwar jede Gröſſe durch die Logarithmen berechnet werden; allein wer ankündigt, daß er eine für den Gebrauch der Logarithmen eingerichtete Formel gefunden habe, muß solche Formeln liefern, welche den Logarithmus der gesuchten Gröſſe durch die Logarithmen der Faktoren unmittelbar geben. Von dieser Art sind die Formeln des Herrn Professors nicht.

Von dieser Art sind die Formeln des Herrn Pro-
 fessors nicht.
 GröÙe durch die Logarithmen der Faktoren unmittelbar
 Formeln liefern, welche den Logarithmus des gesuchten
 Zahlen eingetragene Formeln gefunden haben; und solche
 sein wir anknüpft, daß er eine für den Gebrauch der Lo-
 garithmen durch die Logarithmen berechnet werden; al-
 den können, täuscht sich und seine Leser. Es kann zwar
 daß seine Formeln durch die Logarithmen berechnet wer-
 den eine Auflösung dieses Problems gab, und behauptet,
 der Supplemente des böhmischen Astronomischen Jahr-
 werden. Der Herr Professor Haupt, der in dem 4. Band
 löst und unmittelbar durch die Logarithmen berechnet
 Auch diese Formeln können nicht in Faktoren zerlegt-

Da man somit die Summe und die Differenz der Sei-
 ten PZ und AP kennt, so kennt man die Seiten selbst.

$$\cos(PZ - AP) = \sin W. \sin(2 + A)$$

$$\cos(PZ + AP) = \sin W. \sin(2 + A)$$
 Und wenn man diesen Wert in eine der beiden Vor-
 gen substituirt

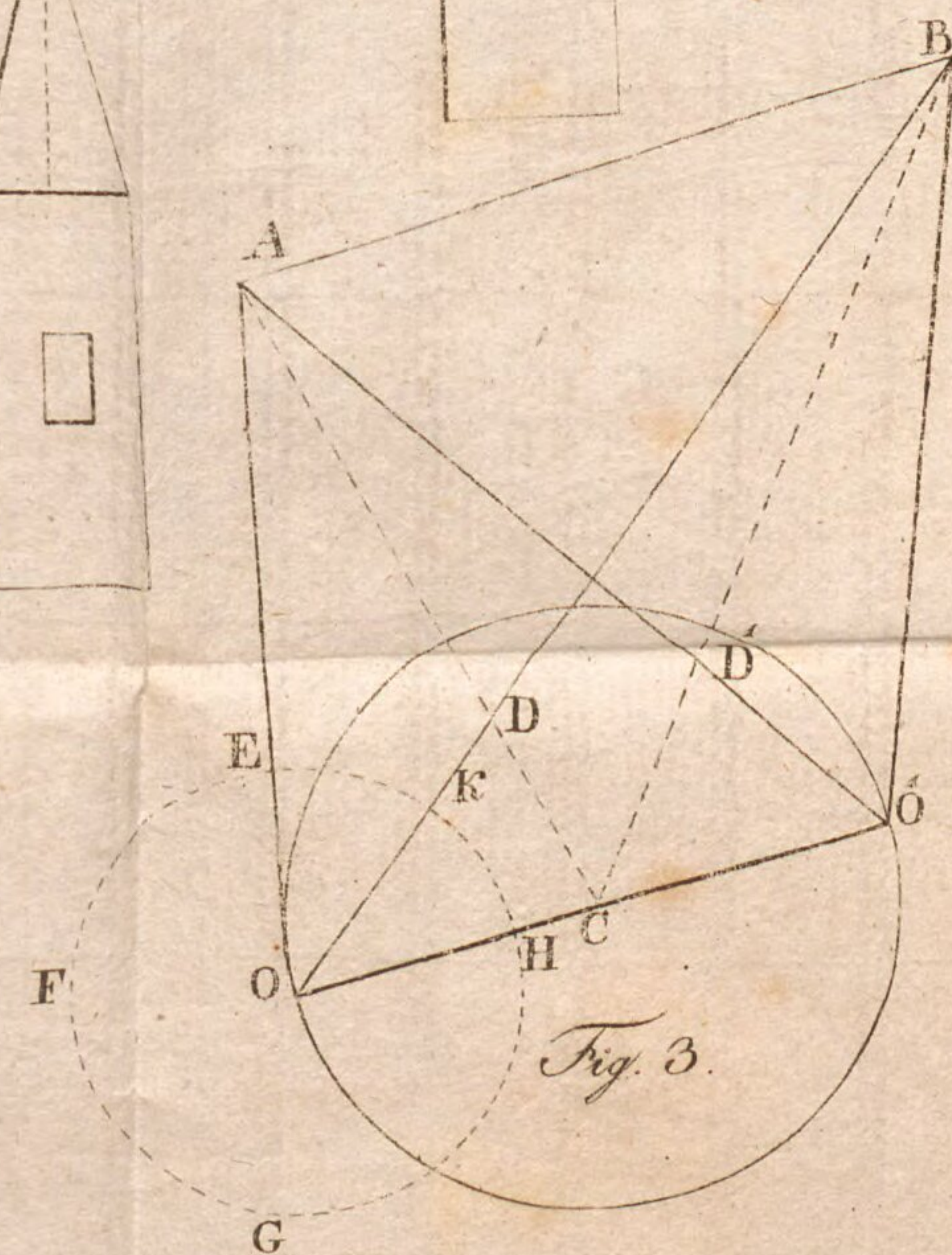
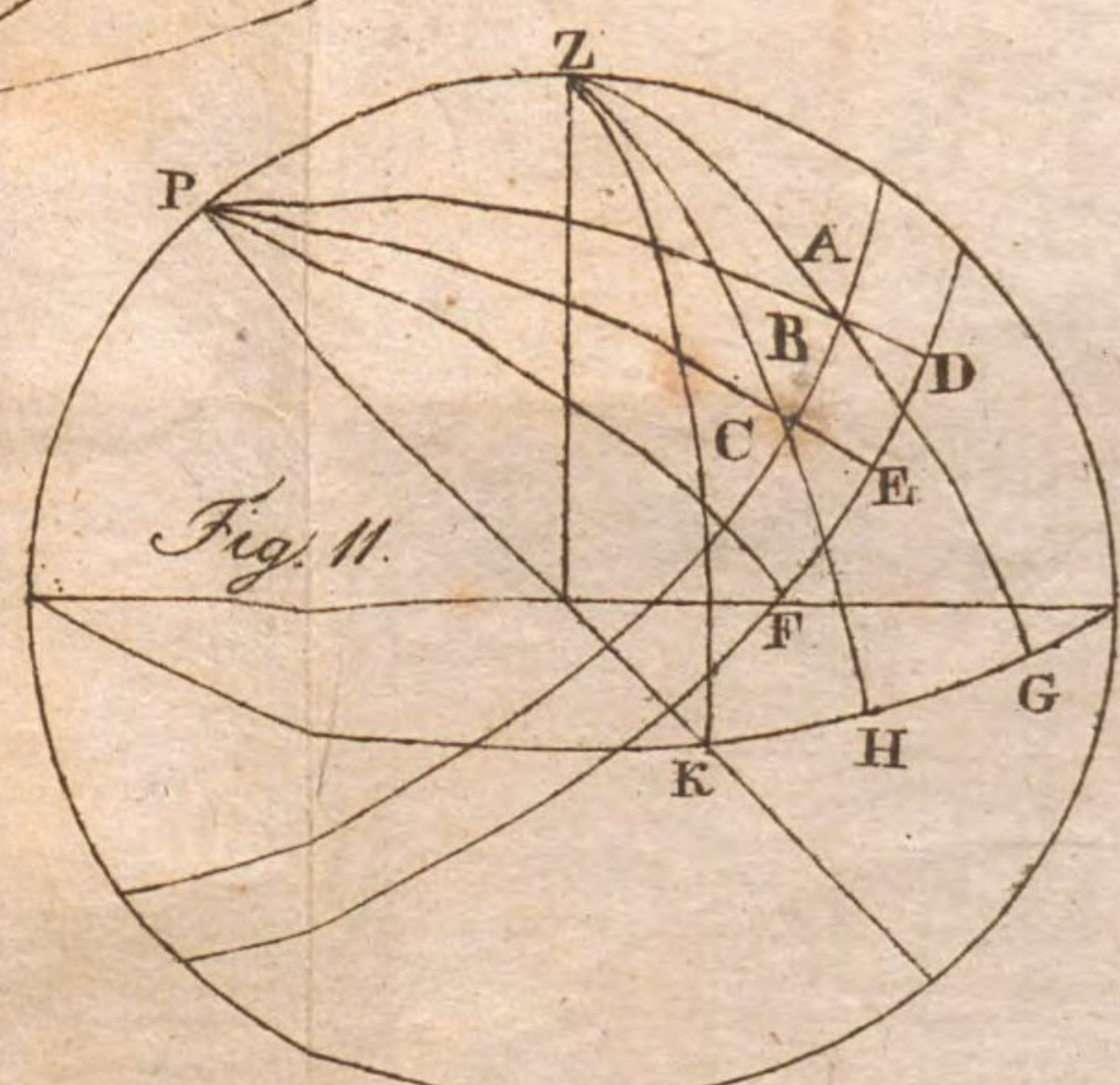
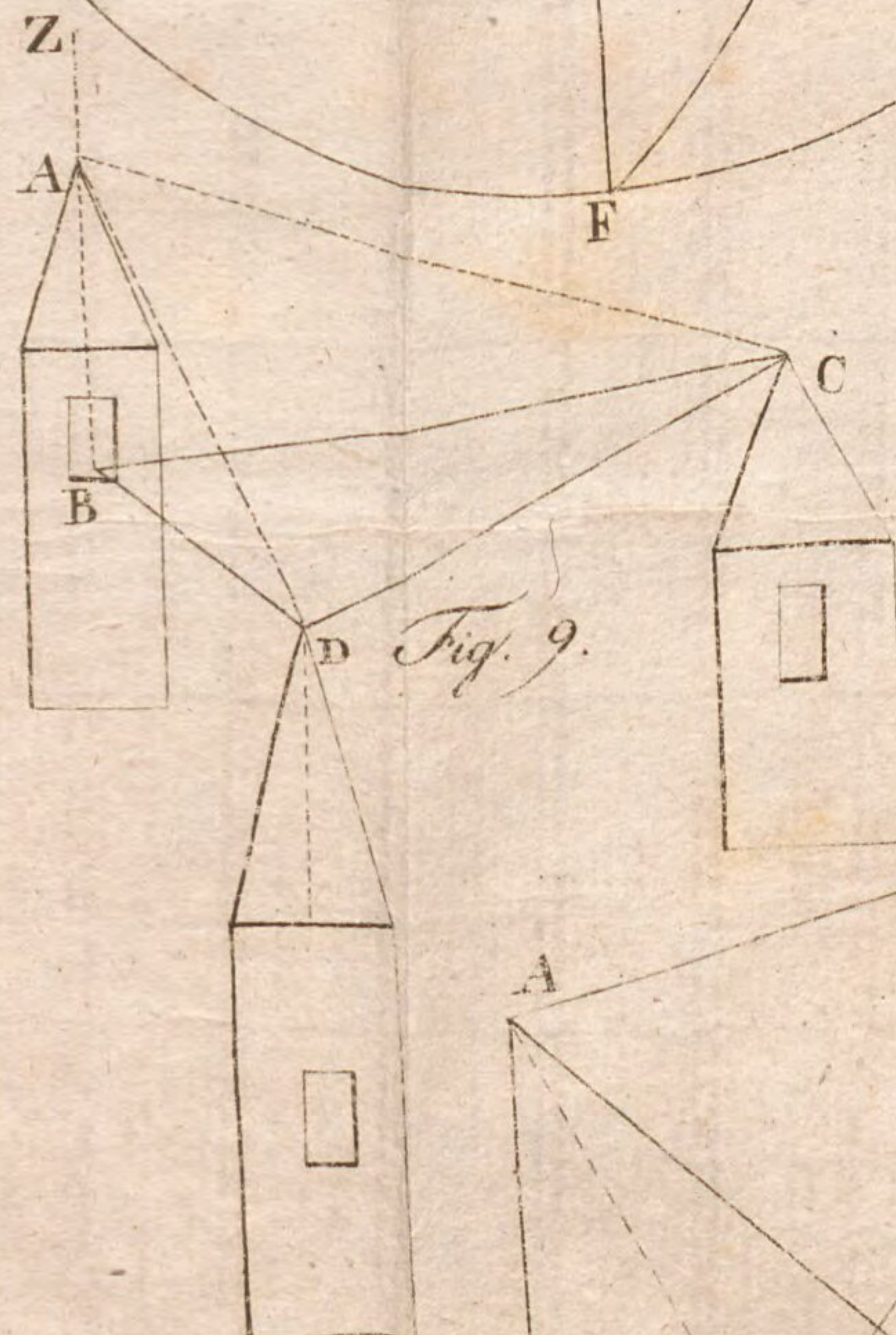
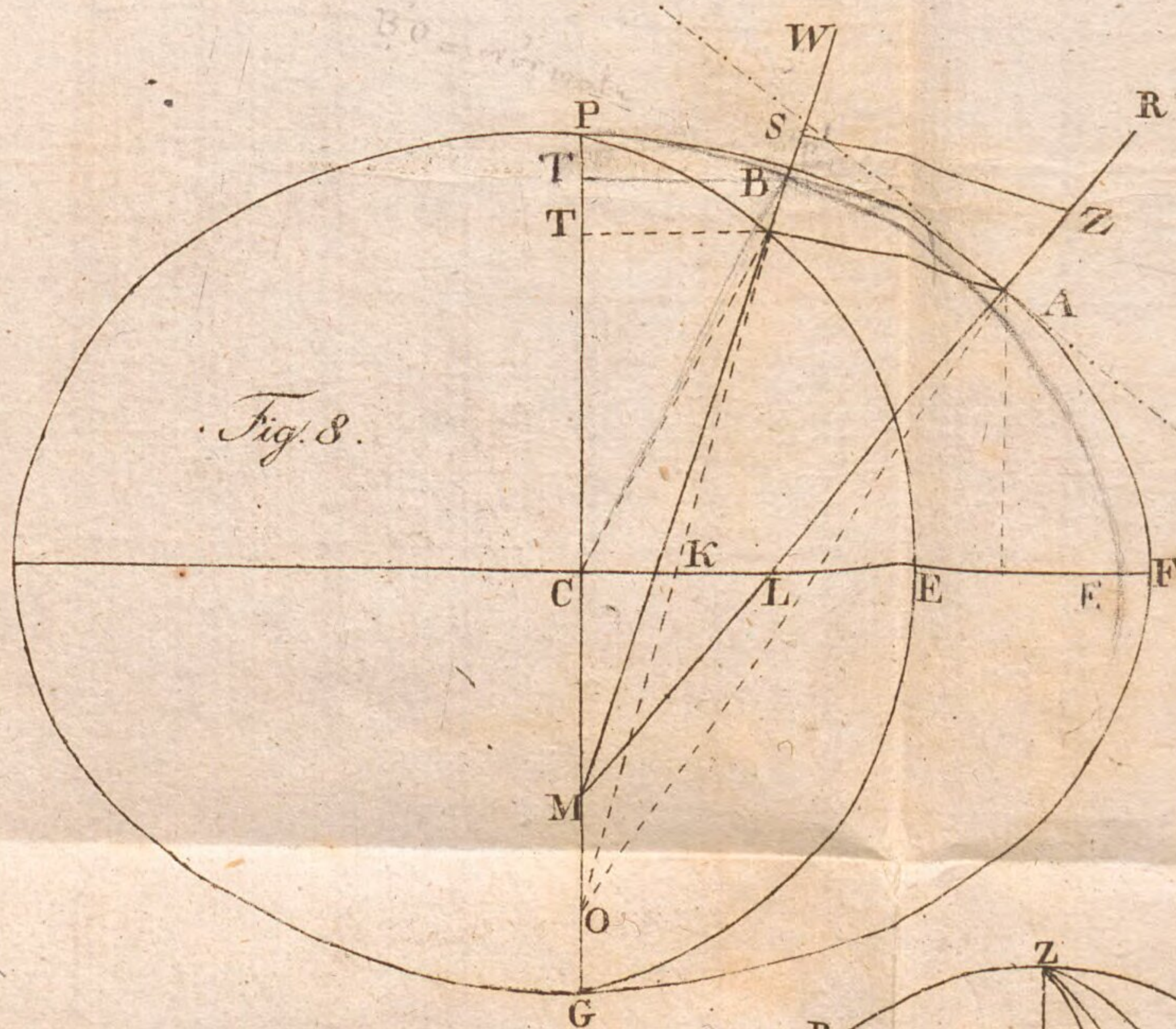
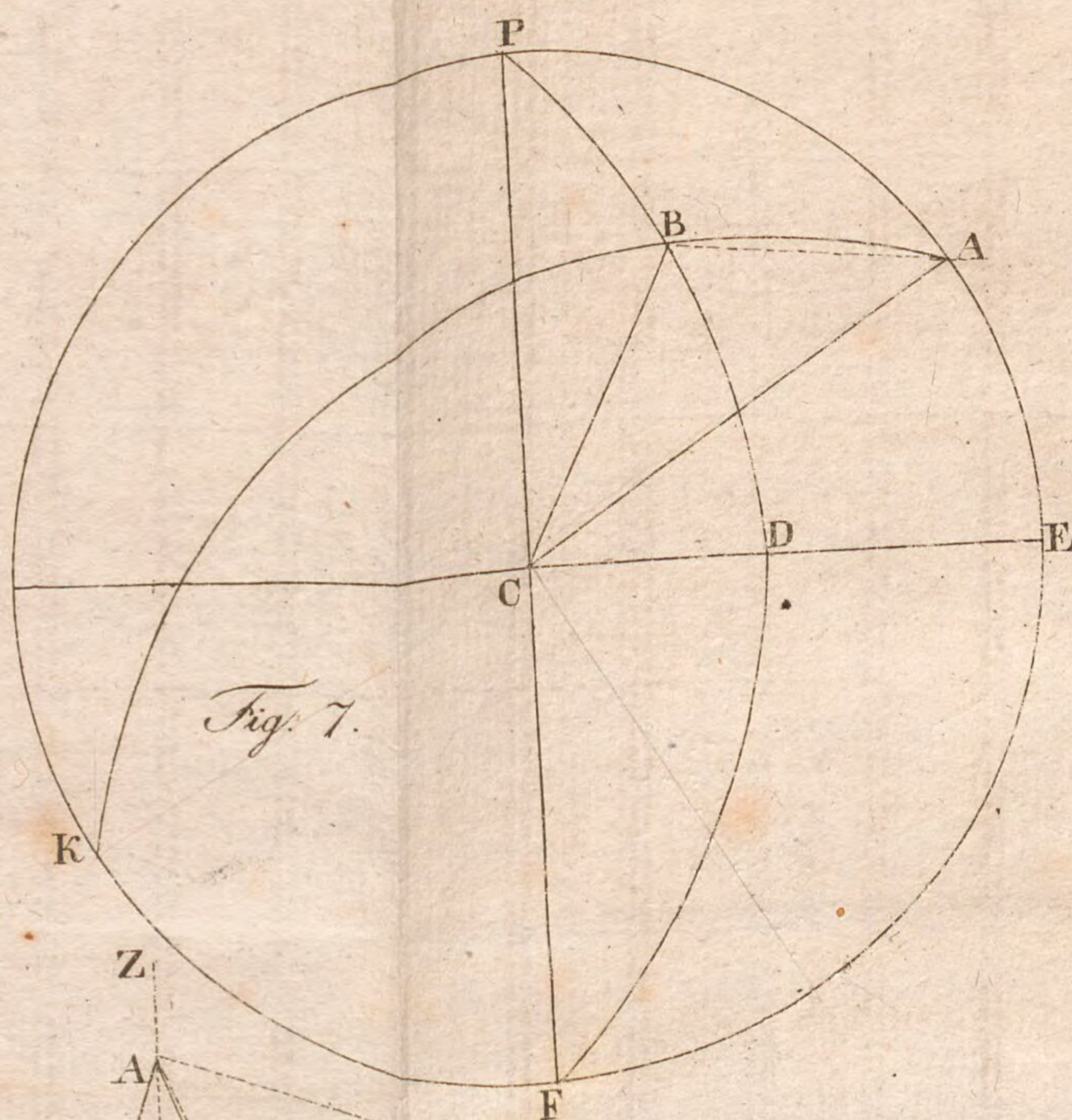
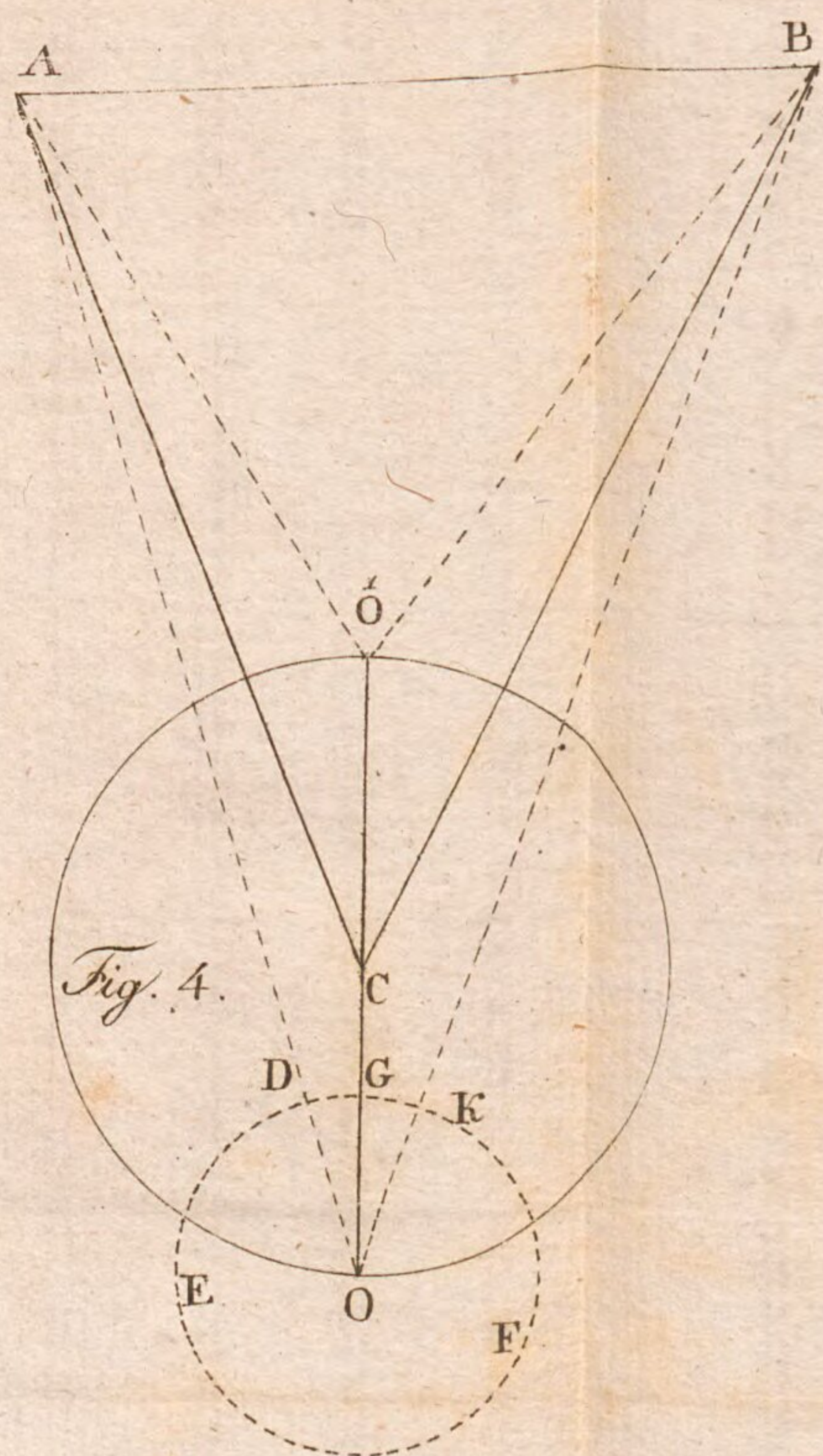
Aus diesen zwey Gleichungen entwickelt man:

$$\cos(PZ + AP) = \sin W. \cos(2 + A) - \sin W. \cos 2$$

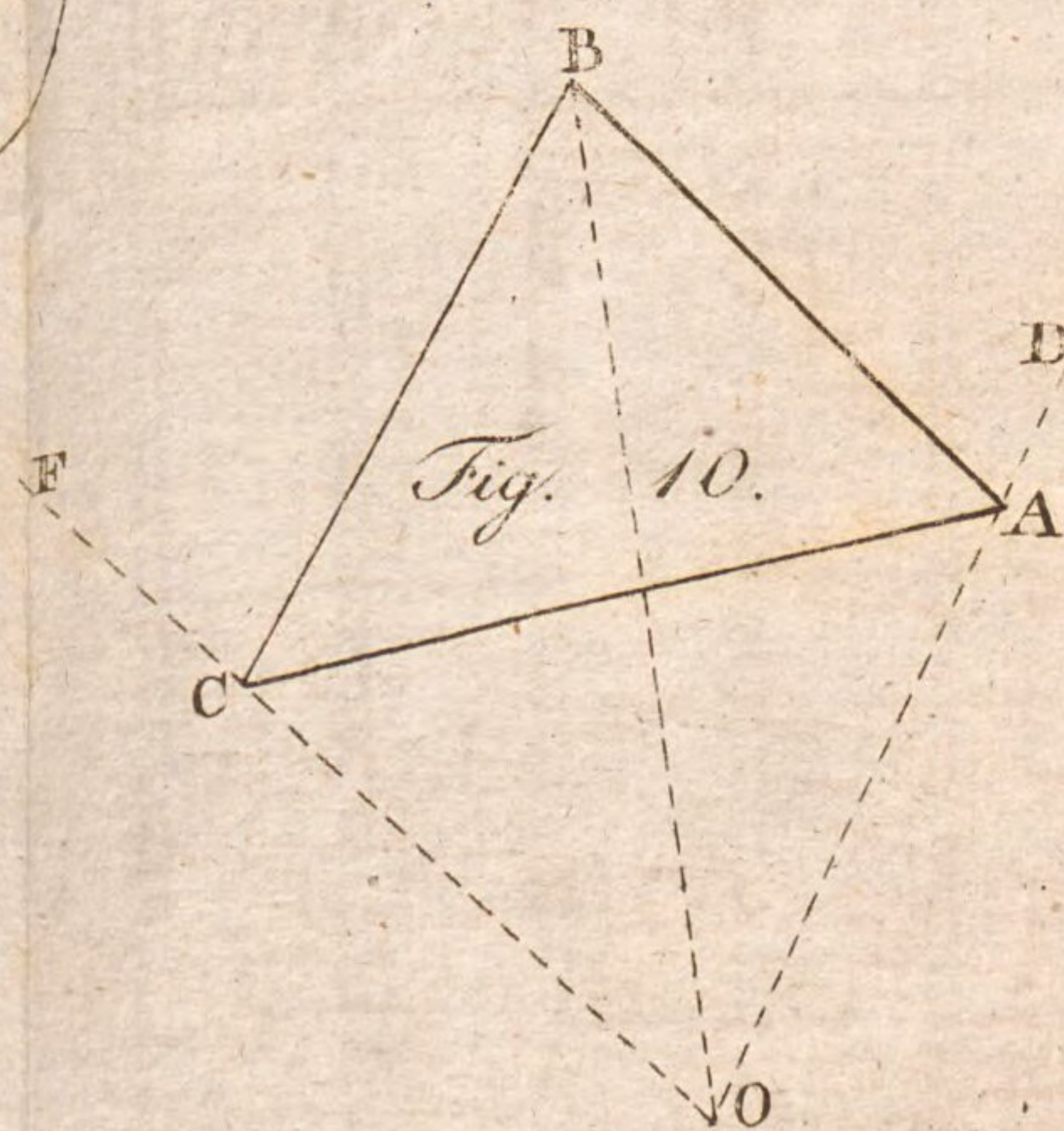
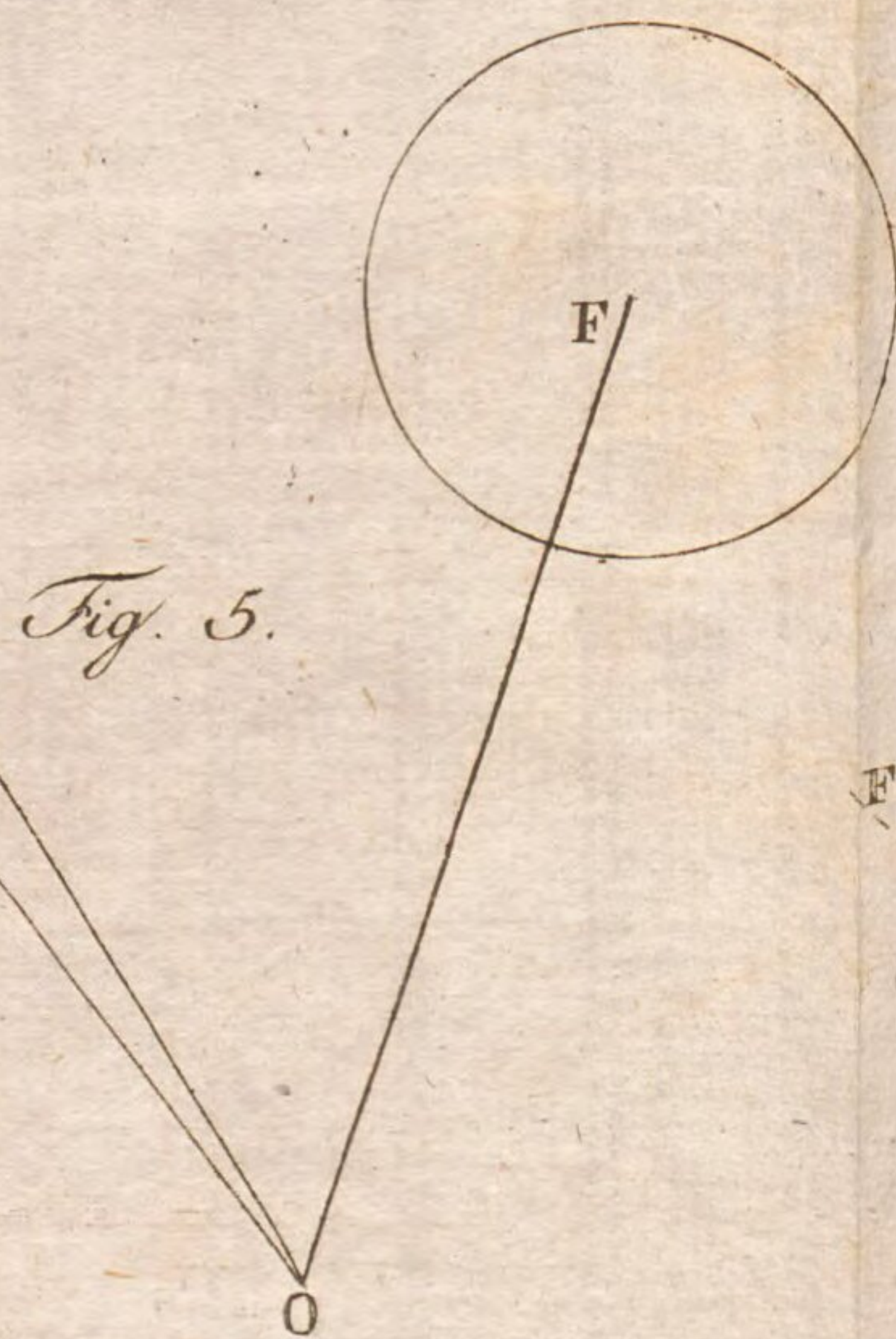
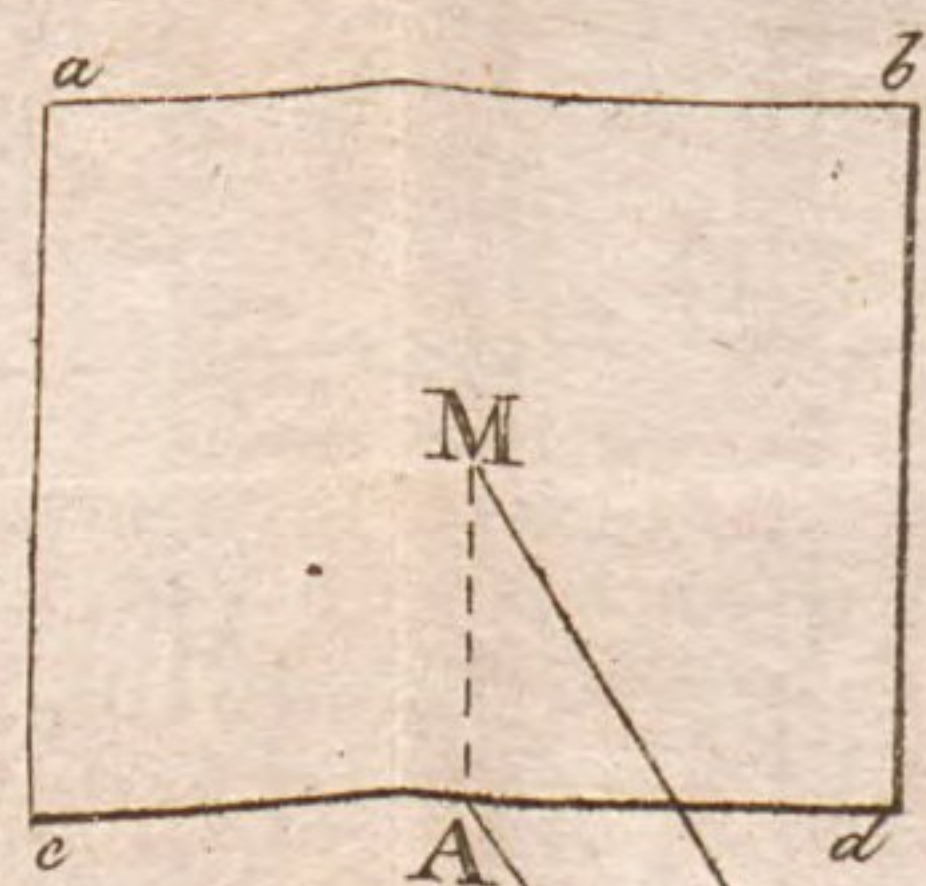
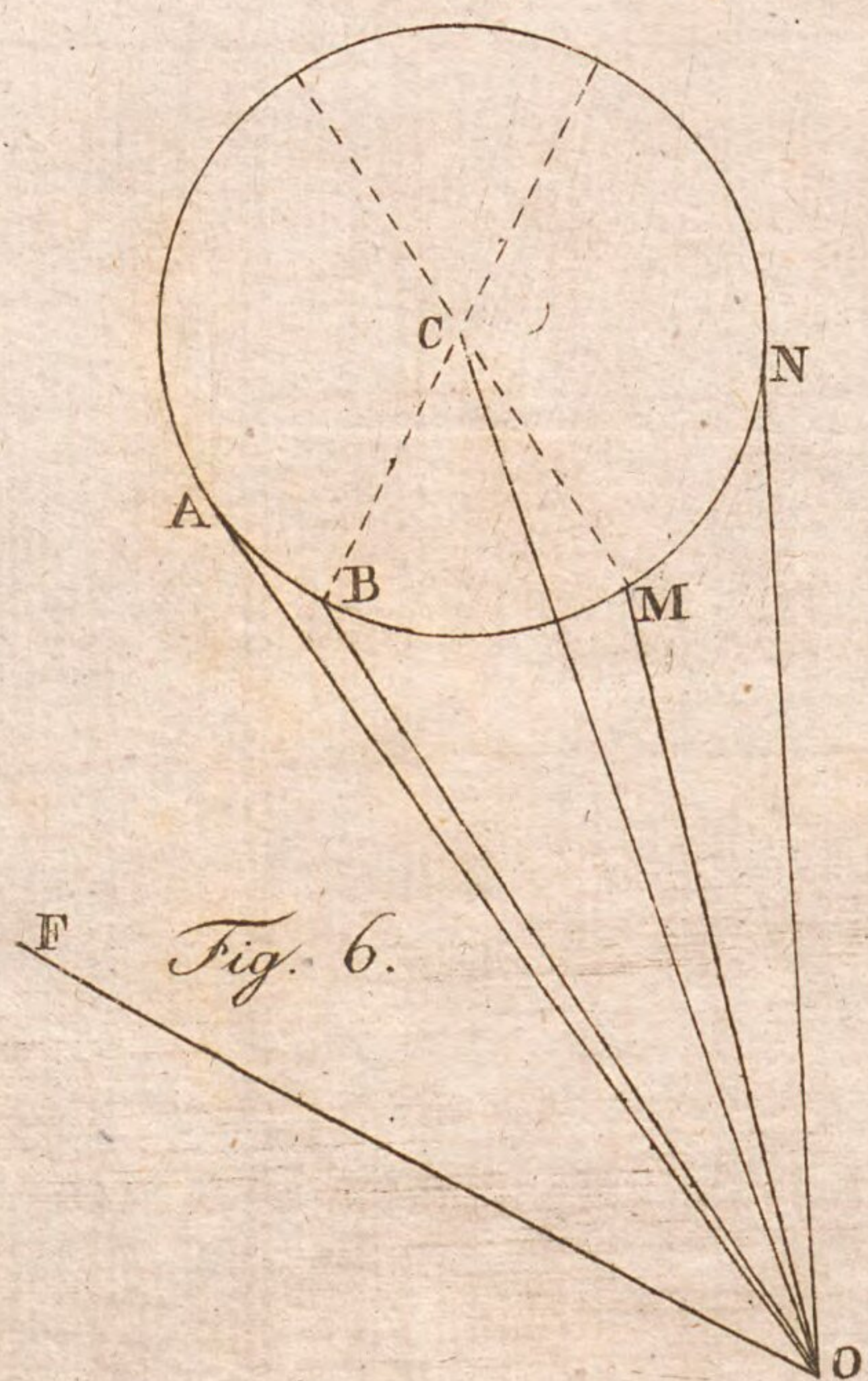
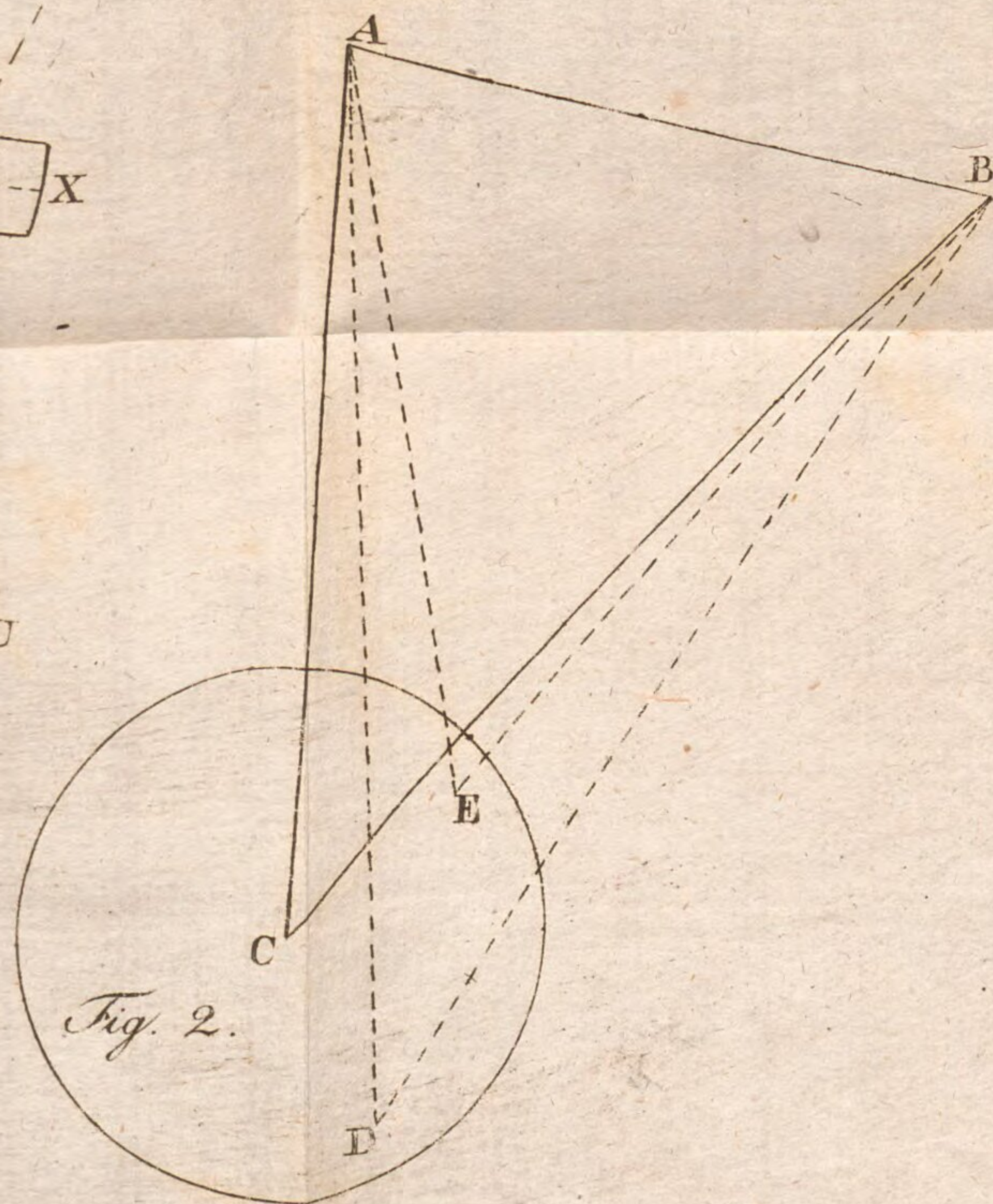
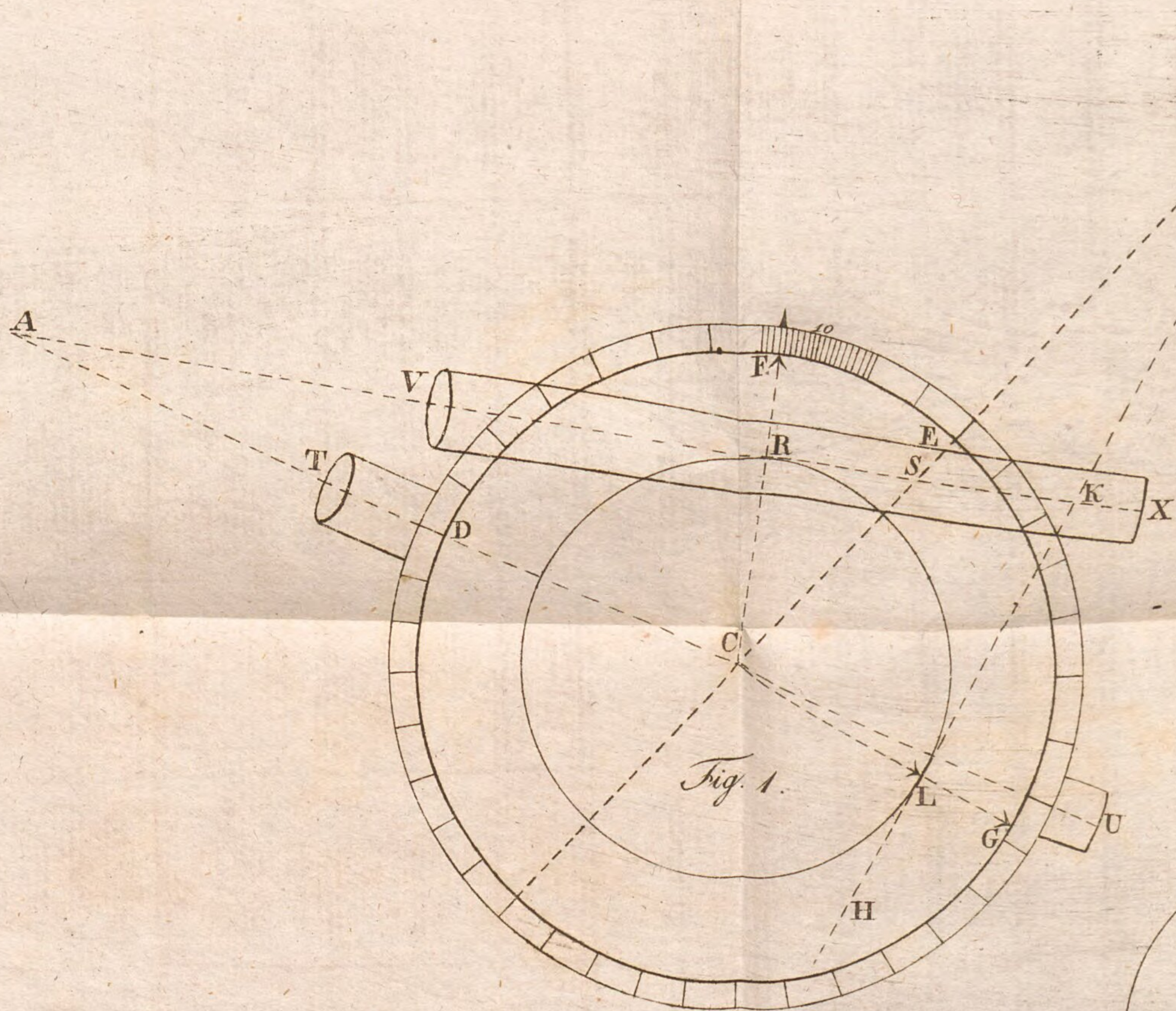
$$\sin 2. \cos(2 + A) - \cos 2. \sin(2 + A)$$

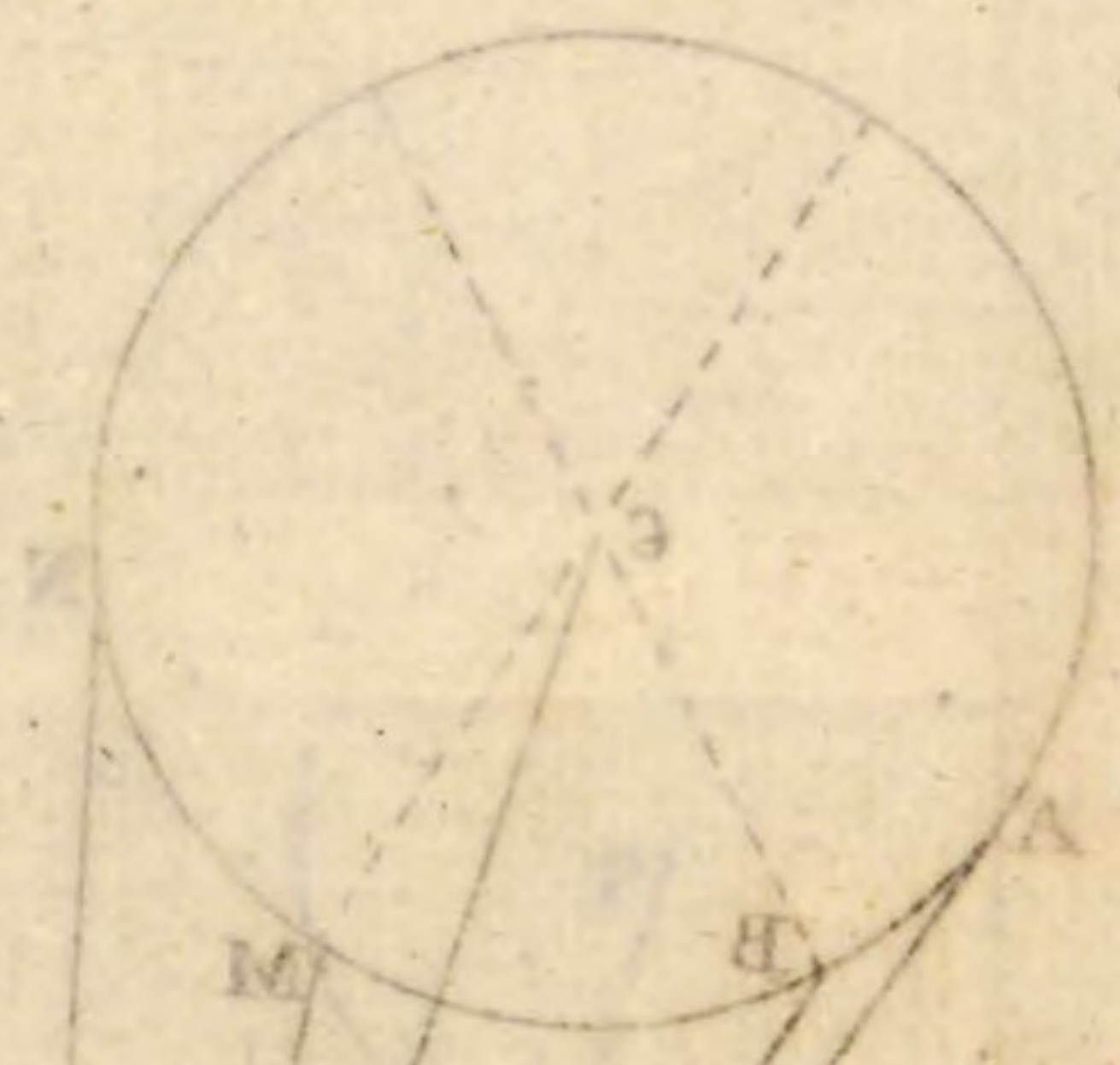
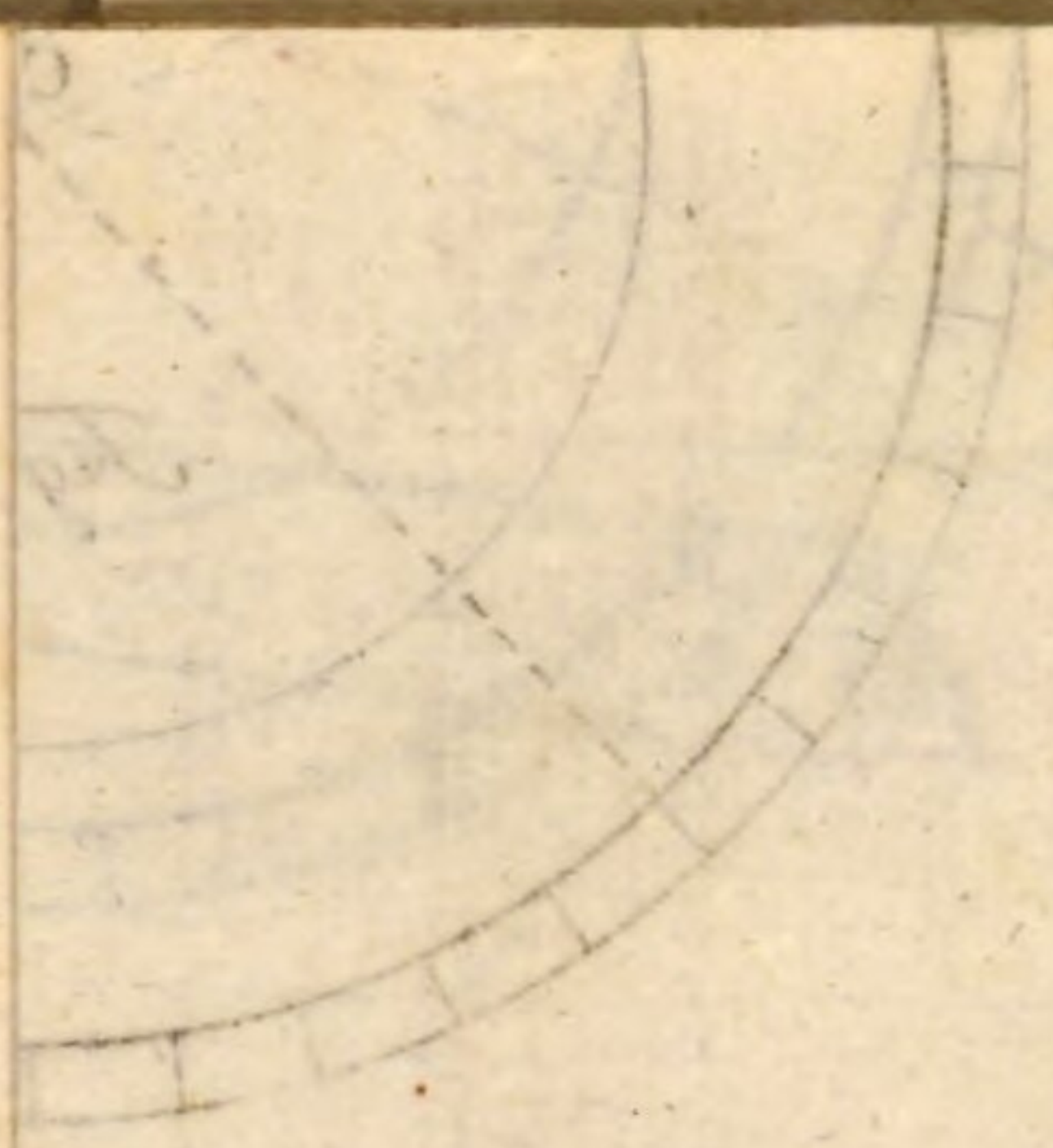
$$= \sin W. \cos(2 + A) - \sin W. \cos 2$$

$$\sin W. \sin(2 + A) - \sin W. \sin 2$$









Tab. II

Fig. 5

Fig. 6





Spaun, Franz Anton von

Practischer Beytrag zu topographischen Vermessungen mit Bemerkungen über
die Methoden und Formeln des Herrn Delambre und anderer französischer
Geometer

Nürnberg 1810

Math.a. 23

urn:nbn:de:bvb:12-bsb10080535-6